Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10\sqrt{2}\,x_1 + 6\sqrt{2}\,x_2 + 16 = 0 \right\}.$$

Finden Sie eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a sowie einen Skalar c, so dass die Quadrik in der Form

$$x^\mathsf{T} Ax + 2a^\mathsf{T} x + c = 0$$

geschrieben werden kann.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad a = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad c = 16$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A: 2, 4

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für die Quadrik Q und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q diese Form annimmt.

Euklidische Normalform: $-z_1^2 - 2z_2^2 + 1 = 0$

Koordinatensystem: $\mathbb{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **4. 2. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer: (7 Spalten mit Kästchen 0–9)

Gruppe: (2 Spalten mit Kästchen 0–9)

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3\alpha & 2\alpha-3 \\ 0 & \alpha & 2\alpha+3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha =$ $\boxed{5\alpha+6}$ $\quad \det A_\alpha =$ $\boxed{12\alpha(\alpha+3)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}}$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(-2, -\alpha, \alpha)^\intercal$.

$\lambda_1 =$ $\boxed{\alpha+3}$

(d) Bestimmen Sie zwei weitere Eigenwerte von A_α:

$\lambda_2 =$ $\boxed{3}$ $\quad \lambda_3 =$ $\boxed{4\alpha}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \frac{15}{7}$ und $\det(B) = -\frac{1}{3}\mathrm{i}$ und sei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 3-2\mathrm{i} & 0 \\ -3 & 4\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$\det(C) =$ $\boxed{-3+2\mathrm{i}}$, $\quad \det(A^\intercal B) =$ $\boxed{-\frac{5\mathrm{i}}{7}}$, $\quad \det(2B^{-1}AB) =$ $\boxed{\frac{120}{7}}$, $\quad \det(ABC) =$ $\boxed{\frac{10}{7}+\frac{15\mathrm{i}}{7}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte λ sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten e_λ und d_λ von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$:

λ	2, −3
e_λ	$e_2 = 2,\ e_{-3} = 2$
d_λ	$d_2 = 1,\ d_{-3} = 2$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_{\mathbb{E}}X \mapsto \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \, {}_{\mathbb{E}}X + \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_{\mathbb{G}}X \mapsto \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \, {}_{\mathbb{G}}X + \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}}$$

(c) Sei ${}_{\mathbb{G}}P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten ${}_{\mathbb{E}}P$ und ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{E}}P = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}}, \quad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\frac{8}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : w \mapsto \begin{pmatrix} 3a+9 & -a+4 & 2 \\ -2a-6 & a-4 & -1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Bestimmen Sie den linearen Anteil sowie den Translationsanteil von $g \circ f$.

Linearer Anteil: $\boxed{\begin{pmatrix} a+17 & 21 \\ -14 & a-18 \end{pmatrix}}$ $\quad$ Translationsanteil: $\boxed{\begin{pmatrix} 3a+8 \\ -2a-3 \end{pmatrix}}$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $g \circ f$ eine Affinität? $a \in \mathbb{R} \setminus \{$ $\boxed{-3,4}$ $\}$

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 11x_1^2 + 14x_2^2 + 4x_1x_2 + 4\sqrt{5}\,x_1 + 28\sqrt{5}\,x_2 + 65 = 0 \right\}.$$

Finden Sie eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a sowie einen Skalar c, so dass die Quadrik in der Form

$$x^{\mathsf{T}} Ax + 2a^{\mathsf{T}} x + c = 0$$

geschrieben werden kann.

$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad a = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad c = 65$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A: $10, \ 15$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für die Quadrik Q und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q diese Form annimmt.

Euklidische Normalform: $-2z_1^2 - 3z_2^2 + 1 = 0$

Koordinatensystem: $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **4. 2. 2023**

☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2\alpha & \alpha-2 \\ 0 & \alpha & 2\alpha+2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{4\alpha+4}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{6\alpha(\alpha+2)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,-2\}}$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(-2,-\alpha,\alpha)^\intercal$.

$\lambda_1 = \boxed{\alpha+2}$

(d) Bestimmen Sie zwei weitere Eigenwerte von A_α:

$\lambda_2 = \boxed{2}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{3\alpha}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times3}$ mit $\det(A) = \frac{8}{3}$ und $\det(B) = \frac{1}{4}\mathrm{i}$ und sei

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -1+3\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$\det(C) = \boxed{4-12\mathrm{i}}$, $\det(A^\intercal B) = \boxed{\frac{2\mathrm{i}}{3}}$, $\det(2B^{-1}AB) = \boxed{\frac{64}{3}}$, $\det(ABC) = \boxed{8+\frac{8\mathrm{i}}{3}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte λ sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten e_λ und d_λ von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$:

λ	$3, 5, -2$
e_λ	$e_3 = 1, e_5 = 1, e_{-2} = 2$
d_λ	$d_3 = 1, d_5 = 1, d_{-2} = 1$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{E}X \mapsto \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}} {}_\mathbb{E}X + \boxed{-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{G}X \mapsto \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}} {}_\mathbb{G}X + \boxed{\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}$$

(c) Sei ${}_\mathbb{G}P = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten ${}_\mathbb{E}P$ und ${}_\mathbb{F}P$:

$${}_\mathbb{E}P = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}}, \quad {}_\mathbb{F}P = \boxed{-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : w \mapsto \begin{pmatrix}3a-3 & -a-2 & 2\\ -2a+2 & a+2 & -1\end{pmatrix} w + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Bestimmen Sie den linearen Anteil sowie den Translationsanteil von $g \circ f$.

Linearer Anteil: $\boxed{\begin{pmatrix}a-7 & -9\\ 6 & a+8\end{pmatrix}}$ $\quad$ Translationsanteil: $\boxed{\begin{pmatrix}3a-4\\ -2a+5\end{pmatrix}}$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $g \circ f$ eine Affinität? $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \boxed{\text{-2,1}} \right\}$

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 14\sqrt{2}\,x_1 + 10\sqrt{2}\,x_2 + 24 = 0 \right\}.$$

Finden Sie eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a sowie einen Skalar c, so dass die Quadrik in der Form

$$x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$$

geschrieben werden kann.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad a = \sqrt{2}\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad c = 24$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A: $2,\ 6$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für die Quadrik Q und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q diese Form annimmt.

Euklidische Normalform: $-z_1^2 - 3z_2^2 + 1 = 0$

Koordinatensystem: $\mathbb{F} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **4. 2. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ■3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3\alpha & -4\alpha+3 \\ 0 & \alpha & 2\alpha-3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{-\alpha-6}$ $\quad \det A_\alpha = \boxed{6\alpha(\alpha-3)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}}$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(-2,-\alpha,\alpha)^\intercal$.

$\lambda_1 = \boxed{\alpha-3}$

(d) Bestimmen Sie zwei weitere Eigenwerte von A_α:

$\lambda_2 = \boxed{-3}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{-2\alpha}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \frac{10}{3}$ und $\det(B) = -\frac{1}{5}\mathrm{i}$ und sei

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 5\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$\det(C) = \boxed{6+3\mathrm{i}}$, $\quad \det(A^\intercal B) = \boxed{-\frac{2\mathrm{i}}{3}}$, $\quad \det(2B^{-1}AB) = \boxed{\frac{80}{3}}$, $\quad \det(ABC) = \boxed{2-4\mathrm{i}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte λ sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten e_λ und d_λ von $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$:

λ	4, 1
e_λ	$e_4 = 2,\ e_1 = 2$
d_λ	$d_4 = 2,\ d_1 = 1$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{E}X \mapsto \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{E}X + \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{G}X \mapsto \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{G}X + \boxed{-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$$

(c) Sei ${}_\mathbb{G}P = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten ${}_\mathbb{E}P$ und ${}_\mathbb{F}P$:

$${}_\mathbb{E}P = \boxed{\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}, \quad {}_\mathbb{F}P = \boxed{\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ w \mapsto \begin{pmatrix} 3a+3 & -a+3 & 2 \\ -2a-2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Bestimmen Sie den linearen Anteil sowie den Translationsanteil von $g \circ f$.

Linearer Anteil: $\boxed{\begin{pmatrix} a+9 & 12 \\ -8 & a-11 \end{pmatrix}}$ $\quad$ Translationsanteil: $\boxed{\begin{pmatrix} 3a+2 \\ -2a+1 \end{pmatrix}}$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $g \circ f$ eine Affinität? $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\boxed{-1,3}\right\}$

Aufgabe 7 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 12x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_1x_2 + 8\sqrt{5}\,x_1 + 36\sqrt{5}\,x_2 + 85 = 0 \right\}.$$

Finden Sie eine symmetrische Matrix A, einen Vektor a sowie einen Skalar c, so dass die Quadrik in der Form

$$x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0$$

geschrieben werden kann.

$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$ $\quad a = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\quad c = 85$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A: $10,\ 20$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform für die Quadrik Q und geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in welchem Q diese Form annimmt.

Euklidische Normalform: $-2z_1^2 - 4z_2^2 + 1 = 0$

Koordinatensystem: $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **4. 2. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die vom reellen Parameter α abhängige Matrix A_α durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4\alpha & 3\alpha-4 \\ 0 & \alpha & 2\alpha+4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A_α.

$\operatorname{Sp} A_\alpha = \boxed{6\alpha+8}$ $\det A_\alpha = \boxed{20\alpha(\alpha+4)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A_α invertierbar?

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}}$

(c) Bestimmen Sie den Eigenwert von A_α zum Eigenvektor $(-2, -\alpha, \alpha)^\intercal$.

$\lambda_1 = \boxed{\alpha + 4}$

(d) Bestimmen Sie zwei weitere Eigenwerte von A_α:

$\lambda_2 = \boxed{4}$ $\lambda_3 = \boxed{5\alpha}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \frac{10}{7}$ und $\det(B) = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ und sei

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$\det(C) = \boxed{-3-6\mathrm{i}}$, $\det(A^\intercal B) = \boxed{\frac{5\mathrm{i}}{7}}$, $\det(2B^{-1}AB) = \boxed{\frac{80}{7}}$, $\det(ABC) = \boxed{\frac{30}{7} - \frac{15\mathrm{i}}{7}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte λ sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten e_λ und d_λ von $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$:

λ	$-1, 3, 5$
e_λ	$e_{-1} = 2,\ e_3 = 1,\ e_5 = 1$
d_λ	$d_{-1} = 1,\ d_3 = 1,\ d_5 = 1$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist das Standardkoordinatensystem $\mathbb{E}$ des $\mathbb{R}^2$ sowie die affinen Koordinatensysteme

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \right), \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{E}X \mapsto \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{E}X + \boxed{-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G}$:

$${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : {}_\mathbb{G}X \mapsto \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{G}X + \boxed{-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}}$$

(c) Sei ${}_\mathbb{G}P = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten ${}_\mathbb{E}P$ und ${}_\mathbb{F}P$:

$${}_\mathbb{E}P = \boxed{\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}}, \quad {}_\mathbb{F}P = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9\\7\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ w \mapsto \begin{pmatrix} 3a+12 & -a+2 & 2 \\ -2a-8 & a-2 & -1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung. Bestimmen Sie den linearen Anteil sowie den Translationsanteil von $g \circ f$.

Linearer Anteil: $\boxed{\begin{pmatrix} a+16 & 18 \\ -12 & a-14 \end{pmatrix}}$ Translationsanteil: $\boxed{\begin{pmatrix} 3a+11 \\ -2a-5 \end{pmatrix}}$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $g \circ f$ eine Affinität? $a \in \mathbb{R} \setminus \{\boxed{-4{,}2}\}$