Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+2)^2} = \boxed{3}$

(b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(5 + 3(-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{8}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)} = \boxed{\frac{2}{3}}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - \sqrt{x^2+6}\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1+1)\mathrm{e}^{x_1} + 10x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C\colon [-\ln(4), \ln(4)] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{5}\,, \qquad U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{x_1\mathrm{e}^{x_1} + 5x_1^2x_2}$$

(b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K.

$$C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}}\,, \qquad L(K) = \boxed{\frac{15}{4}}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - 4xy - 2x - \frac{2}{3}y^3 + 8y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 - 4y + x - 2 \\ (x-2)(y^2-4) \end{pmatrix}}\,, \qquad \mathrm{H}\,f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & y^2-4 \\ y^2-4 & 2y(x-2) \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f, die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\left(\frac{22}{3}, 2\right)^\intercal}\,, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\left(2, 2\sqrt{3}\right)^\intercal}$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-5)^n\, t^n}{\pi^{n-3}}$ konvergent? Für $t \in \boxed{\left(-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)}$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{4^{2n}(2n)!} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2\pi}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 4x)^2 & , \text{ falls } x \neq \beta, \\ \beta & , \text{ falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1,\beta}$ stetig? $\beta \in \left\{ \boxed{0,\ \frac{1}{25}} \right\}$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha,1}$ stetig? $\alpha \in \left\{ \boxed{-5,\ -3} \right\}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{x+3y}.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f: $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{3y^2}{(x+3y)^2}} , \boxed{\frac{x^2}{(x+3y)^2}} \right)^\mathsf{T}$

(b) den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{3}{16}} , \boxed{\frac{1}{16}} \right)^\mathsf{T}$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) = \boxed{\frac{1}{4}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 4x\cosh(2x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \boxed{\big[2x\sinh(2x)-\cosh(2x)\big]}$

(b) $\int \frac{9x-7}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \boxed{\left[\frac{9}{2}\ln(x^2+1)-7\arctan(x)\right]}$

(c) $\int \frac{9x+7}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \boxed{\big[8\ln|x-1|+\ln|x+1|\big]}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f\colon(-5,5)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\,5^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0=0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0=0$ an.

$$f'(x)=\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{5^{k+1}}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$$f'(x)=\boxed{\frac{1}{5-x}}$$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$$f(x)=\boxed{\ln\left(\frac{5}{5-x}\right)}\,,\qquad f(1)=\boxed{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+2)^2} = \boxed{4}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(5+3(-1)^n+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}\right) = \boxed{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+2}\right) = \boxed{\dfrac{7}{2}}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1+1)\mathrm{e}^{x_1} + 8x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C \colon [-\ln(5), \ln(5)] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{4}, \qquad U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{x_1\mathrm{e}^{x_1} + 4x_1^2x_2}$$

(b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K.

$$C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}}, \qquad L(K) = \boxed{\frac{24}{5}}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Wir betrachten die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - 4xy - 3x - y^3 + 12y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 - 4y + x - 3 \\ (x-3)(y^2-4) \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{H}\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & y^2-4 \\ y^2-4 & 2y(x-3) \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f, die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\left(\frac{25}{3}, 2\right)^\intercal}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\left(3, 2\sqrt{3}\right)^\intercal}$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3^n\,(-t)^n}{\pi^{n-5}}$ konvergent? Für $t \in$ $\boxed{\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)}$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n-1}}{6^{2n}(2n)!} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Gegeben ist die von den Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 3x)^2 & , \text{ falls } x \neq \beta, \\ \beta & , \text{ falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1,\beta}$ stetig? $\beta \in \left\{ \boxed{0,\ \frac{1}{16}} \right\}$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha,1}$ stetig? $\alpha \in \left\{ \boxed{-4,\ -2} \right\}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{x+4y}\,.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{4y^2}{(x+4y)^2}} , \boxed{\frac{x^2}{(x+4y)^2}} \right)^{\mathsf{T}}$

(b) den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{4}{25}} , \boxed{\frac{1}{25}} \right)^{\mathsf{T}}$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) = \boxed{\frac{1}{5}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int 9x\cosh(3x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[3x\sinh(3x)-\cosh(3x)\right]}$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+1)-5\arctan(x)\right]}$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[4\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f\colon(-6,6)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\,6^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0=0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0=0$ an.

$$f'(x)=\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{6^{k+1}}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$$f'(x)=\boxed{\frac{1}{6-x}}$$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$$f(x)=\boxed{\ln\left(\frac{6}{6-x}\right)}\,,\qquad f(1)=\boxed{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+2)^2} = \boxed{5}$

(b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(4+3(-1)^n+(-1)^n\frac{1}{n+2}\right) = \boxed{7}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(5x)} = \boxed{\frac{2}{5}}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+9x}-\sqrt{x^2+8}\right) = \boxed{\frac{9}{2}}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1+1)\mathrm{e}^{x_1} + 6x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C \colon [-\ln(3), \ln(3)] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$$a = \boxed{3}, \qquad U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{x_1\mathrm{e}^{x_1} + 3x_1^2x_2}$$

(b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K.

$$C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}}, \qquad L(K) = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Wir betrachten die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - xy - 3x - y^3 + 3y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 - y + x - 3 \\ (x-3)(y^2-1) \end{pmatrix}}, \qquad \mathrm{H}\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & y^2-1 \\ y^2-1 & 2y(x-3) \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f, die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\left(\frac{11}{3}, 1\right)^\mathsf{T}}, \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\left(3, \sqrt{3}\right)^\mathsf{T}}$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-6)^n\, t^n}{\pi^{n-3}}$ konvergent? Für $t \in$ $\boxed{\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)}$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n}(2n)!} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Gegeben ist die von den Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha,\beta}\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 2x)^2 & ,\ \text{falls } x \neq \beta, \\ \beta & ,\ \text{falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1,\beta}$ stetig? $\beta \in \left\{ \boxed{0,\ \frac{1}{9}} \right\}$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha,1}$ stetig? $\alpha \in \left\{ \boxed{-3,\ -1} \right\}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to\ \mathbb{R}\colon\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{5x+y}\,.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{y^2}{(5x+y)^2}}\ ,\ \boxed{\frac{5x^2}{(5x+y)^2}} \right)^{\mathsf{T}}$

(b) den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{1}{36}}\ ,\ \boxed{\frac{5}{36}} \right)^{\mathsf{T}}$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) = \boxed{\frac{1}{6}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int 4x \sinh(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\big[2x\cosh(2x) - \sinh(2x)\big]}$

(b) $\displaystyle\int \frac{5x-9}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[\tfrac{5}{2}\ln(x^2+1) - 9\arctan(x)\Big]}$

(c) $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\big[7\ln|x-1| - 2\ln|x+1|\big]}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f\colon (-3,3) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\,3^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$$f'(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^{k+1}}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{3-x}}$$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$$f(x) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{3-x}\right)}, \qquad f(1) = \boxed{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/4	/5	/4	/2	/2	/4	/5	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+2)^2} = \boxed{6}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4+3(-1)^n+(-1)^n\dfrac{1}{n+2}\right) = \boxed{1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(4x)} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4}\right) = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben sind das Vektorfeld

$$f_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x_1+1)\mathrm{e}^{x_1} + 4x_1x_2 \\ ax_1^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C\colon [-\ln(6), \ln(6)] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, für welches a das Vektorfeld f_a ein Potential besitzt, und geben Sie für diesen Wert von a ein Potential U von f_a an.

$a = \boxed{2}$, $\quad U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{x_1\mathrm{e}^{x_1} + 2x_1^2x_2}$

(b) Bestimmen Sie $C'(t)$ und berechnen Sie die Länge $L(K)$ der Kurve K.

$C'(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t) \end{pmatrix}}$, $\quad L(K) = \boxed{\frac{35}{6}}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy^3 - xy - 4x - \frac{4}{3}y^3 + 4y$$

auf dem 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse–Matrix von f.

$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 - y + x - 4 \\ (x-4)(y^2-1) \end{pmatrix}}$, $\quad \mathrm{H} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & y^2-1 \\ y^2-1 & 2y(x-4) \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f, die im 1. Quadranten $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ liegen.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boxed{\left(\frac{14}{3}, 1\right)^\intercal}$, $\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{\left(4, \sqrt{3}\right)^\intercal}$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*)

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty} \frac{7^n\,(-t)^n}{\pi^{n-5}}$ konvergent? Für $t \in$ $\boxed{\left(-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)}$

(b) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{6^{2n}(2n)!} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Gegeben ist die von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} (\alpha x + 5x)^2 & , \text{ falls } x \neq \beta, \\ \beta & , \text{ falls } x = \beta. \end{cases}$$

(a) Sei $\alpha = 1$. Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist $f_{1,\beta}$ stetig? $\beta \in \left\{ \boxed{0,\ \frac{1}{36}} \right\}$

(b) Sei $\beta = 1$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_{\alpha,1}$ stetig? $\alpha \in \left\{ \boxed{-6,\ -4} \right\}$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{2x+y}\,.$$

Berechnen Sie:

(a) den Gradienten von f : $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{y^2}{(2x+y)^2}}\ ,\ \boxed{\frac{2x^2}{(2x+y)^2}} \right)^{\mathsf{T}}$

(b) den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{grad} f \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\frac{1}{9}}\ ,\ \boxed{\frac{2}{9}} \right)^{\mathsf{T}}$

(c) die Ableitung von f längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\partial_v f(a) = \boxed{\frac{1}{3}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 9x\sinh(3x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\big[3x\cosh(3x) - \sinh(3x)\big]}$

(b) $\int \frac{7x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{7}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan(x)\right]}$

(c) $\int \frac{7x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\big[5\ln|x-1| + 2\ln|x+1|\big]}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Potenzreihe

$$f\colon (-4,4) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\,4^k}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(a) Geben Sie die Potenzreihe von f' um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$$f'(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{4^{k+1}}}$$

(b) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f' an.

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{4-x}}$$

(c) Geben Sie eine geschlossene Darstellung von f an und berechnen Sie $f(1)$.

$$f(x) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{4-x}\right)}\ , \qquad f(1) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$
