Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha + 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{-2}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{-\frac{9}{2}}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -4, -4, 2)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{-2}$

(b) Sei nun $\alpha = -4$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \, {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}} \, {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{3n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{\frac{7}{3}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \boxed{\frac{9}{8}}$.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{4 + 2\alpha}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{0}\,, \qquad \lambda_2 = \boxed{3}\,, \qquad \lambda_3 = \boxed{1 + 2\alpha}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}} \right), \qquad d_0 = \boxed{1}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 3p(0) \\ 3p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{\text{nein}}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{\text{ja}}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\, x_1^2 + 2s x_1 x_2 + \tfrac{1}{2}\, x_2^2 + x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & s \\ s & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}, \qquad A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & s \\ \frac{1}{2} & s & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$$r_{\text{erw}} = \boxed{\begin{cases} 2\,, & \text{für } s = \frac{1}{2} \\ 3\,, & \text{für } s \neq \frac{1}{2} \end{cases}}$$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$$s = \boxed{-\tfrac{1}{2}}$$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{-\tfrac{1}{2}y_1^2 - \tfrac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{Ellipse}}$, $\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 3\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}$, $z_2 = \boxed{-\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}$, $z_3 = \boxed{-5\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studiengang:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{\frac{5}{4}}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{-3}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -7, -2, 1)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{-3}$

(b) Sei nun $\alpha = -2$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{F}$ und ${}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}$.

$${}_\mathbb{E}\kappa_\mathbb{F}({}_\mathbb{F}v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{F}v + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}, \qquad {}_\mathbb{F}\kappa_\mathbb{E}({}_\mathbb{E}v) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} {}_\mathbb{E}v + \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_\mathbb{F}S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_\mathbb{E}S = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_\mathbb{E}X = {}_\mathbb{F}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_\mathbb{E}X = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{7n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{\frac{3}{7}},$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \boxed{\frac{6}{5}}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{6 + 2\alpha}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{0}\ , \qquad \lambda_2 = \boxed{5}\ , \qquad \lambda_3 = \boxed{1 + 2\alpha}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}} \right), \qquad d_0 = \boxed{1}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 2p(0) \\ 3p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{\text{nein}}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{\text{ja}}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}\,x_1^2 + 2sx_1x_2 + \frac{3}{2}\,x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & s \\ s & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}, \qquad A_{\mathrm{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & s \\ \frac{3}{2} & s & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$$r_{\mathrm{erw}} = \boxed{\begin{cases} 2\,, & \text{für } s = \frac{3}{2} \\ 3\,, & \text{für } s \neq \frac{3}{2} \end{cases}}$$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$$s = \boxed{-\tfrac{3}{2}}$$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{Ellipse}}$, $\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 4\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{\sqrt{3} - 3\mathrm{i}}$, $z_2 = \boxed{-\sqrt{3} - 3\mathrm{i}}$, $z_3 = \boxed{-6\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Übungsgruppe:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha - 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{2}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{\frac{9}{2}}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -9, -4, 2)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{-4}$

(b) Sei nun $\alpha = -1$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{8n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{\frac{5}{8}},$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} = \boxed{\frac{9}{7}}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{8 + 2\alpha}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{0}\,, \qquad \lambda_2 = \boxed{7}\,, \qquad \lambda_3 = \boxed{1 + 2\alpha}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}} \right), \qquad d_0 = \boxed{1}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon p \mapsto \begin{pmatrix} 2p(0) \\ 2p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{\text{nein}}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{\text{ja}}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\, x_1^2 - 2s x_1 x_2 + \tfrac{1}{2}\, x_2^2 - x_1 - x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -s \\ -s & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}, \qquad A_{\mathrm{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -s \\ -\frac{1}{2} & -s & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$$r_{\mathrm{erw}} = \boxed{\begin{cases} 2\,, & \text{für } s = -\frac{1}{2} \\ 3\,, & \text{für } s \neq -\frac{1}{2} \end{cases}}$$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$$s = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{Ellipse}}$, $\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 5\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{\sqrt{3} - 4\mathrm{i}}$, $z_2 = \boxed{-\sqrt{3} - 4\mathrm{i}}$, $z_3 = \boxed{-7\mathrm{i}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/5	/2	/7	/2	/7	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\square$ **Übungsgruppe:** $\square$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie α so, dass u_α und v_α ...

(a) orthogonal sind: $\alpha = \boxed{\frac{6}{5}}$,

(b) die gleiche Länge haben: $\alpha = \boxed{-4}$.

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 3, -2, 1)^\intercal$ und $v_2 = (3, 8, -2, 1)^\intercal \in \mathbb{R}^4$. Ferner ist gegeben $v_3 = (\alpha, -1, -6, 3)^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ die drei Vektoren linear abhängig sind.

$\alpha = \boxed{-1}$

(b) Sei nun $\alpha = -3$. Bestimmen Sie: $\dim \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3) = \boxed{3}$

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Die Koordinatensysteme $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ für $\mathbb{R}^2$ sind gegeben durch

$$\mathbb{E} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}({}_{\mathbb{F}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{F}}v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}, \qquad {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}({}_{\mathbb{E}}v) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} {}_{\mathbb{E}}v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

(b) Der Punkt S besitzt die Koordinaten ${}_{\mathbb{F}}S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}S = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}}$.

(c) Es gibt einen Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, für den ${}_{\mathbb{E}}X = {}_{\mathbb{F}}X$ gilt. Berechnen Sie: ${}_{\mathbb{E}}X = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}}$.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n \to \infty} \frac{8n^3 + 2n^2 - 12n + 9}{5n^3 + 10n^2 + 3} = \boxed{\frac{8}{5}},$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α:

$$\mathrm{Sp}(A_\alpha) = \boxed{10 + 2\alpha}$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α:

$$\lambda_1 = \boxed{0}\,, \qquad \lambda_2 = \boxed{9}\,, \qquad \lambda_3 = \boxed{1 + 2\alpha}$$

(c) Für $\alpha = -\frac{1}{2}$ hat die Matrix den Eigenwert $\lambda = 0$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum $V(0)$ und die geometrische Vielfachheit d_0 :

$$V(0) = \mathrm{L}\left(\boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}} \right), \qquad d_0 = \boxed{1}$$

(d) Ist die Matrix $A_{-\frac{1}{2}}$ diagonalisierbar? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben sind die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto \begin{pmatrix} 3p(0) \\ 2p'(0) \end{pmatrix},$$

die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des $\mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}$ mit $b_1(X) = 3X^2 - 2,\ b_2(X) = 2X + 3,\ b_3(X) = X^2 + X$ sowie die Standardbasis E des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E\varphi_B$ an.

$${}_E\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Ist φ injektiv? $\boxed{\text{nein}}$ Ist φ surjektiv? $\boxed{\text{ja}}$ Ist φ bijektiv? $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s = \left\{ (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{3}{2}\, x_1^2 - 2s x_1 x_2 + \frac{3}{2}\, x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 = 0 \right\}.$$

(a) Die Quadrik Q_s hat die Matrixbeschreibung $Q_s = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0\}$. Geben Sie die Matrix A sowie die erweiterte Matrix A_{erw} von Q_s an.

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -s \\ -s & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}, \qquad A_{\text{erw}} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -s \\ -\frac{3}{2} & -s & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s den Rang r_{erw} der erweiterten Matrix A_{erw}.

$$r_{\text{erw}} = \boxed{\begin{cases} 2\,, & \text{für } s = -\frac{3}{2} \\ 3\,, & \text{für } s \neq -\frac{3}{2} \end{cases}}$$

(c) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist Q_s eine parabolische Quadrik?

$$s = \boxed{\tfrac{3}{2}}$$

(d) Sei nun $s = 0$. Geben Sie die euklidische Normalform (ENF) und die Gestalt der Quadrik Q_0 sowie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem Q_0 diese euklidische Normalform besitzt.

ENF: $\boxed{-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 1 = 0}$, Gestalt: $\boxed{\text{Ellipse}}$, $\mathbb{F} = \boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 6\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{\sqrt{3} - 5\mathrm{i}}$, $z_2 = \boxed{-\sqrt{3} - 5\mathrm{i}}$, $z_3 = \boxed{-8\mathrm{i}}$
