Aufgabe 7 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist die Funktion $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x\mathrm{e}^{(-x^2)}$.

(a) Berechnen Sie: $f'(x) =$ $\boxed{(1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}$.

(b) Berechnen Sie: $f''(x) =$ $\boxed{(-6x+4x^3)\mathrm{e}^{-x^2}}$.

(c) Bestimmen Sie diejenige kritische Stelle x_0 von f, die im Intervall $(0,+\infty)$ liegt:

$$x_0 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ .$$

(d) Bestimmen Sie:

$$f''(x_0) = \boxed{-2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}\ .$$

(e) Die Funktion f nimmt einen maximalen Wert an. Bestimmen Sie diesen:

$$\max\big\{ f(x) \mid x \in (0,+\infty) \big\} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}}\ .$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben ist das folgende von einem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld:

$$f_\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma - 2 + \mathrm{e}^{x_1} + \dfrac{x_2}{3} \\ 1 + \dfrac{\gamma^2 x_1}{12} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Rotation von f_γ: $\operatorname{rot} f_\gamma\binom{x_1}{x_2} =$ $\boxed{\dfrac{\gamma^2}{12} - \dfrac{1}{3}}$

(b) Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt f_γ ein Potential? $\boxed{\gamma \in \{-2, 2\}}$

(c) Sei $\gamma = 2$. Bestimmen Sie ein Potential U für f_2, sowie $U\binom{1}{0}$:

$$U\binom{x_1}{x_2} = \boxed{\mathrm{e}^{x_1} + \frac{x_1 x_2}{3} + x_2}\ , \quad U\binom{1}{0} = \boxed{\mathrm{e}}$$

(d) Wir betrachten eine Kurve K von $\binom{-1}{0}$ nach $\binom{1}{0}$. Bestimmen Sie:

$$\int_K f_2(x) \bullet \mathrm{d}\,x = \boxed{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}$$

Schein-Nachklausur **Höhere Mathematik 2** **21. 7. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ■1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \sin(2x)\big(\cos(2x)\big)^{5/2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{1}{7}\big(\cos(2x)\big)^{7/2}\right]}$

(b) $\int x^5\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[\frac{x^6}{6}\left(\ln(x)-\frac{1}{6}\right)\right]}$

(c) $\int_1^{\mathrm{e}} x^5\ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\frac{1}{36}(5\mathrm{e}^6+1)}$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Gegeben sei die Funktion $f\colon (1,+\infty)\to\mathbb{R} : x\mapsto \cos\left(\pi\sqrt{x-1}\right)$. Bestimmen Sie die Ableitungen:

$$f'(x) = \boxed{-\frac{\pi\sin(\pi\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}}}$$

$$f''(x) = \boxed{\frac{\pi\left(\sin(\pi\sqrt{x-1})-\pi\sqrt{x-1}\cos(\pi\sqrt{x-1})\right)}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{5}{4}$:

$$T_2\left(f,x,\frac{5}{4}\right) = \boxed{0} + \boxed{(-\pi)}\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right) + \boxed{\pi}\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)^2$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ■3

Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-3x^2+3}{x^2+x^4} = \boxed{\frac{-6}{x^2+1}+\frac{3}{x^2}}\,.$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{-3x^2+3}{x^2+x^4}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{\left[-\frac{3}{x}-6\arctan(x)\right]}\,.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ■3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x}-2x$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{3^{2k}}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3^x-x^3}{\sin(\pi x)}$
$-\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{27(\ln(3)-1)}{\pi}$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$ in der Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho\in\mathbb{R}_0^+\cup\{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3^n n}\left((1-\mathrm{i})z+8\right)^n$	$\sum\limits_{m=3}^{\infty}7m\left(\frac{(z+7-9\mathrm{i})^3}{8}\right)^m$
z_0	$-4-4\mathrm{i}$	$-7+9\mathrm{i}$
ρ	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2