Aufgabe 6 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Berechnen Sie:

$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}\right)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-4n}}{2n}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$9 \leqq |x|(x+6).$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{QP}$: $\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{QP} = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 12. 2023**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** □1 □2 □3 □4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 □1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^4$ sowie die Vektoren v, w:

$$B : b_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B:

$${}_B v = \boxed{}, \quad {}_B w = \boxed{}, \quad {}_B (v+w) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R} \colon \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a-b)X^2 + c(2-X) + d(X+3).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ \alpha \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = \boxed{}, \qquad \cos\varphi = \boxed{}.$$

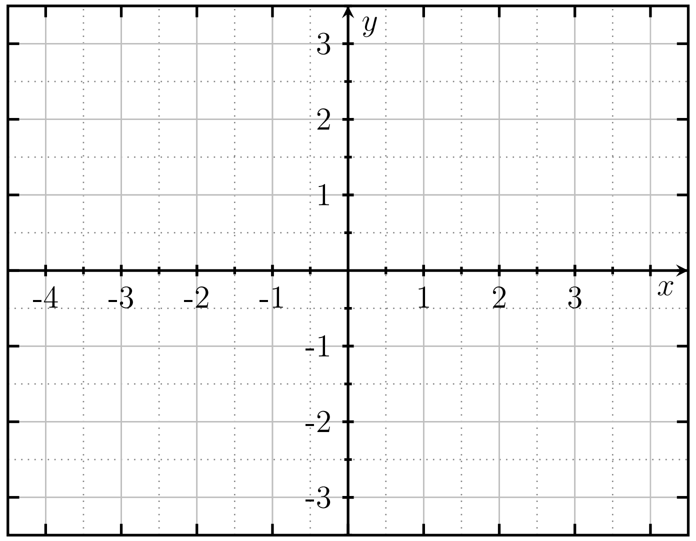
Aufgabe 4 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 2x - 3 + y^2 \leqq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq -2x \right\}$$



Skizzieren Sie die Mengen M_1, $M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.

Aufgabe 5 (6 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{1+7\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2 = \boxed{} \qquad \overline{z} = \boxed{}, \text{ wobei } z = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+2\,\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{} \qquad \arg(z_1) = \boxed{}$$

$$|z_2| = \boxed{} \qquad \arg(z_2) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

□0 □1 □2 □3

Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$	$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-4n}}{n}$	$\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3k}\right)$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

□0 □1 □2 □3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$16 \leqq |x|(x+8).$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

□0 □1 □2 □3 □4 □5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}9\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix}1\\5\\6\end{pmatrix} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{QP}$: $\quad \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{QP} = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

□1 □2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

□0 □1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^4$ sowie die Vektoren v, w:

$$B: b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B:

$${}_Bv = \boxed{}, \quad {}_Bw = \boxed{}, \quad {}_B(v+w) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a+b)X^2 + c(3-X) + d(2X+1).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = \boxed{}, \qquad \cos\varphi = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

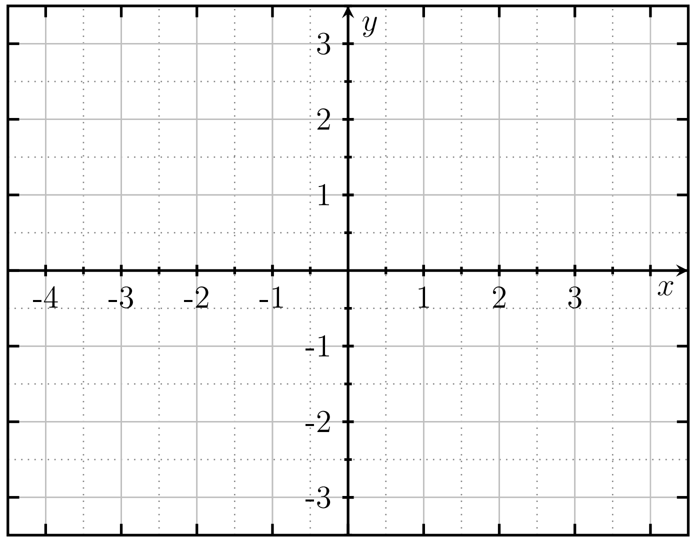
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 + 2y - 3 \leqq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq -2x \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, $M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.



Aufgabe 5 (6 Punkte) 0 1 2 3 4 5 6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 = \boxed{} \qquad \overline{z} = \boxed{}, \text{ wobei } z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i})(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i})^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{} \qquad \arg(z_1) = \boxed{}$$

$$|z_2| = \boxed{} \qquad \arg(z_2) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Berechnen Sie:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^k$	$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k-1}\right)$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{9n^2-4n}}{n}$

Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 □3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1 \leqq |x|(x+2).$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{QP}$: $\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{QP} = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 12. 2023**

□1 □2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 □1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Gruppe:

□0	□0
□1	□1
□2	□2
□3	□3
□4	□4
□5	□5
□6	□6
□7	□7
□8	□8
□9	□9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^4$ sowie die Vektoren v, w:

$$B: b_1 := \begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix}0\\15\\0\\5\end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix}10\\0\\5\\0\end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix}0\\-20\\0\\10\end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix}0\\20\\0\\-10\end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix}10\\30\\5\\10\end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B:

$${}_Bv = \boxed{}, \quad {}_Bw = \boxed{}, \quad {}_B(v+w) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mapsto (a-b)X^2 + c(2+X) + d(3X-1).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix}4\\-2\\\alpha\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix}5\\-4\\-3\\2\end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = \boxed{}, \qquad \cos\varphi = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

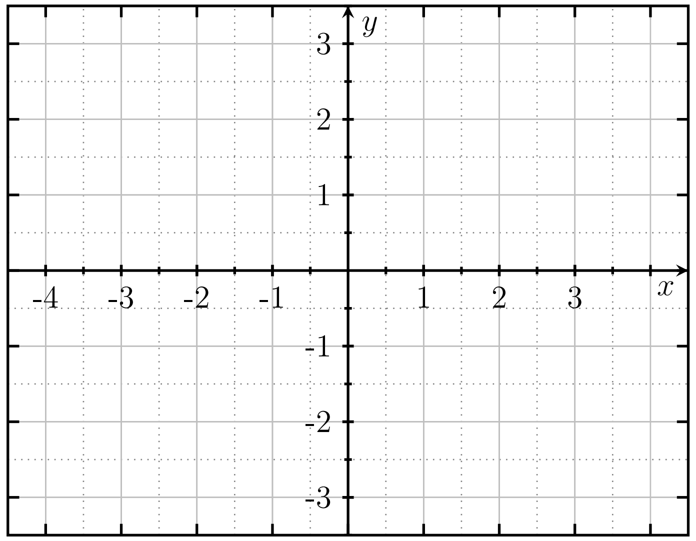
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 2y - 3 \leqq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqq -x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq 2x \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, $M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.



Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{3+4\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}\right)^2 = \boxed{} \qquad \overline{z} = \boxed{}, \text{ wobei } z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{i}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{8}(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{} \qquad \arg(z_1) = \boxed{}$$

$$|z_2| = \boxed{} \qquad \arg(z_2) = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-4n}}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{4} \left(\dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2n}\right)$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k$

Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$4 \leqq |x|(x+4).$$

☐

Aufgabe 8 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Die Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Sei E die Ebene durch die Punkte P, Q, R.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an:

$$E : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \boxed{} + \mu \boxed{} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt von $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{QP}$: $\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{QP} = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform von E:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n \mid x \rangle = d\} \quad \text{mit } n = \boxed{} \quad \text{und} \quad d = \boxed{}.$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **16. 12. 2023**

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^4$ sowie die Vektoren v, w:

$$B: b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die folgenden Koordinatenvektoren bezüglich B:

$${}_Bv = \boxed{}, \quad {}_Bw = \boxed{}, \quad {}_B(v+w) = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Pol}_2\,\mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto (a+b)X^2 + c(X+3) + d(2-X).$$

Bestimmen Sie $\alpha(w)$.

$$\alpha(w) = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben seien

$$u_\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u_α und v orthogonal sind: $\alpha = \boxed{}$.

(b) Sei nun $\alpha = 0$. Geben Sie den Betrag $|v|$ des Vektors v und den Cosinus des Winkels φ zwischen u_0 und v an:

$$|v| = \boxed{}, \qquad \cos\varphi = \boxed{}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

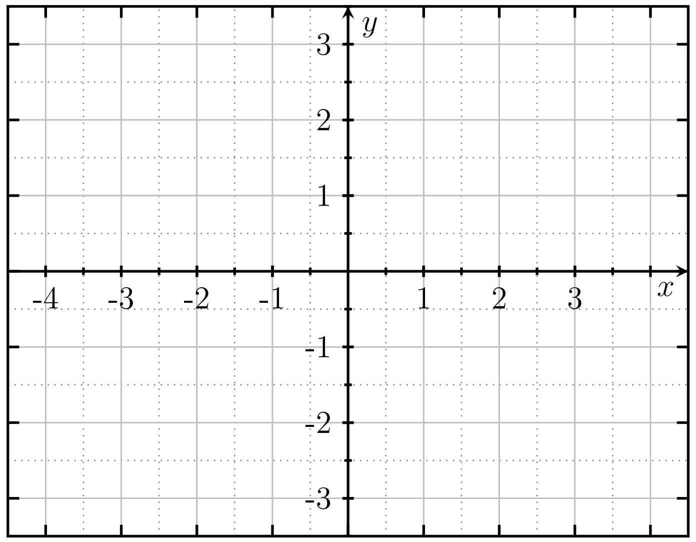
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2x - 3 + y^2 \leqq 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq x \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqq -2x \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, $M_2 \cup M_3$ und $M_4 := M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ in die reelle Ebene ein. Markieren Sie durch unterschiedliche Schraffuren.



Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\left(\frac{7+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 = \boxed{} \qquad \overline{z} = \boxed{}, \text{ wobei } z = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$$

(b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})^3.$$

Geben Sie die Beträge $|z_1|, |z_2|$ und die Winkel $\arg(z_1), \arg(z_2) \in [0, 2\pi)$ an.

$$|z_1| = \boxed{} \qquad \arg(z_1) = \boxed{}$$

$$|z_2| = \boxed{} \qquad \arg(z_2) = \boxed{}$$