Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Es sei der folgende Untervektorraum aus dem Raum der reellen 2×2-Matrizen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Basis $B \colon b_1, b_2$ von V mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Weiter sei $\varphi \colon V \to V$ linear und es gelte

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von $\varphi(b_1)$ und $\varphi(b_2)$ bezüglich der Basis B.

$$_B(\varphi(b_1)) = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}}, \quad _B(\varphi(b_2)) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie $_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}$.

(c) Geben Sie eine Basis C von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. $C\colon \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}$

(d) Geben Sie eine Basis D von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. $D\colon \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(AB) = \boxed{-72}$, $\det(B^\mathsf{T} B) = \boxed{16}$, $\det(A+B) = \boxed{19}$.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \boxed{175}$.

(c) Seien $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(C) = \frac{20}{7}$, $\det(D) = -\frac{5}{7}$. Berechnen Sie

$\det(D^{-1}C) = \boxed{-4}$, $\det(C^\mathsf{T} D^{-1} C) = \boxed{-\frac{80}{7}}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Für $t \in \mathbb{R}$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 14 & t-10 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$B^\mathsf{T} B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix}}$ $B^\mathsf{T} A_0 =$ „nicht definiert“ $B\,B^\mathsf{T} = \boxed{\begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\, x = B^\mathsf{T}$: $\boxed{x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{24 - 8t}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\, x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{3}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei P der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{0}$ $\lambda_2 = \boxed{-6}$ $\lambda_3 = \boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B : \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Es sei der folgende Untervektorraum aus dem Raum der reellen 2×2-Matrizen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Basis $B\colon b_1, b_2$ von V mit $b_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ linear und es gelte

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von $\varphi(b_1)$ und $\varphi(b_2)$ bezüglich der Basis B.

$${}_B(\varphi(b_1)) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad {}_B(\varphi(b_2)) = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie ${}_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}$.

(c) Geben Sie eine Basis C von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. C: $\boxed{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$

(d) Geben Sie eine Basis D von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. D: $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **03. 02. 2024**

☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(AB) = \boxed{14}$, $\det(B^{\mathsf{T}}B) = \boxed{49}$, $\det(A+B) = \boxed{5}$.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{126}$.

(c) Seien $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(C) = -2$, $\det(D) = \frac{2}{5}$. Berechnen Sie

$\det(D^{-1}C) = \boxed{-5}$, $\det(C^{\mathsf{T}}D^{-1}C) = \boxed{10}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Für $t \in \mathbb{R}$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 4 & -10 & t-4 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert" in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$B\,A_0 = \boxed{(28\ \ -72\ \ -32)}$ $B^{\mathsf{T}}A_0 = \boxed{\text{„nicht definiert"}}$ $B^{\mathsf{T}}B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0\,x = B^{\mathsf{T}}$: $\boxed{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{-8t - 24}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t\,x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{-3}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei P der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{0}$ $\lambda_2 = \boxed{2}$ $\lambda_3 = \boxed{-6}$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B: \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Es sei der folgende Untervektorraum aus dem Raum der reellen 2×2-Matrizen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Basis $B\colon b_1, b_2$ von V mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ linear und es gelte

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von $\varphi(b_1)$ und $\varphi(b_2)$ bezüglich der Basis B.

$$_B(\varphi(b_1)) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}, \quad _B(\varphi(b_2)) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie $_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

(c) Geben Sie eine Basis C von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. $C\colon$ $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$

(d) Geben Sie eine Basis D von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. $D\colon$ $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

☐1 ☐2 ■3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(AB) = \boxed{11}$, $\det(B^{\mathsf{T}}B) = \boxed{121}$, $\det(A+B) = \boxed{-17}$.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-45}$.

(c) Seien $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(C) = \frac{14}{3}$, $\det(D) = -\frac{7}{3}$. Berechnen Sie

$\det(D^{-1}C) = \boxed{-2}$, $\det(C^{\mathsf{T}}D^{-1}C) = \boxed{-\frac{28}{3}}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Für $t \in \mathbb{R}$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 4 & -6 & t-5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$A_0 B =$ „nicht definiert“ $B^{\mathsf{T}}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_0 B^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0 x = B^{\mathsf{T}}$: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{-8t - 16}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{-2}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Sei P der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{0}$ $\lambda_2 = \boxed{-5}$ $\lambda_3 = \boxed{4}$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B: \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Es sei der folgende Untervektorraum aus dem Raum der reellen 2×2-Matrizen gegeben:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Basis $B\colon b_1, b_2$ von V mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Weiter sei $\varphi\colon V \to V$ linear und es gelte

$$\varphi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b_2) = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren von $\varphi(b_1)$ und $\varphi(b_2)$ bezüglich der Basis B.

$$_B(\varphi(b_1)) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad _B(\varphi(b_2)) = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie $_B\varphi_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}}$.

(c) Geben Sie eine Basis C von Kern(φ) an. C: $\boxed{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}$

(d) Geben Sie eine Basis D von Bild(φ) an. D: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **03. 02. 2024**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ■4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

(a) Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$\det(AB) = \boxed{-42}$, $\det(B^\intercal B) = \boxed{4}$, $\det(A+B) = \boxed{4}$.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{-39}$.

(c) Seien $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(C) = -\frac{9}{5}$, $\det(D) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie

$\det(D^{-1}C) = \boxed{-3}$, $\det(C^\intercal D^{-1} C) = \boxed{\frac{27}{5}}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ■8

Für $t \in \mathbb{R}$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & t-6 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenprodukte. Tragen Sie „nicht definiert" in den Kasten ein, falls die Multiplikation nicht möglich ist.

$A_0 B^\intercal = \boxed{\begin{pmatrix} -24 \\ -38 \\ 22 \end{pmatrix}}$ $B^\intercal B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 25 \end{pmatrix}}$ $B\,B = \boxed{\text{„nicht definiert"}}$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_0 x = B^\intercal$: $\boxed{x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

(c) Berechnen Sie die Determinante von A_t: $\det(A_t) = \boxed{-8t-8}$

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat $A_t x = 0$ unendlich viele Lösungen? $t = \boxed{-1}$

Geben Sie für den Fall die Lösungsmenge an: $\boxed{\mathrm{L}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2, e_3)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^3$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Sei P der Punkt mit Standardkoordinaten ${}_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ und den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad {}_{\mathbb{F}}P = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben ist die folgende reelle Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 = \boxed{0}$ $\lambda_2 = \boxed{-6}$ $\lambda_3 = \boxed{-4}$

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$B: \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$