

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

| | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| x | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x \sin(x)}{\sin(3x)} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{9x+4}} =$

(c) $\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$

(d) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9 + \frac{5}{n}} - 3 \right) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{2} \cos(2n! \pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{}, \quad h_2 = \boxed{}, \quad h_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-3, 7) : x \mapsto \frac{7x - 3}{x + 1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : (-3, 7) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1) = 2$.

(a) Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{}$, $(f^{-1})'(2) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1, 2)$.

$$t_1 : y = \boxed{} x + \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente t_2 an den Graphen von $f^{-1} : (-3, 7) \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(2, 1)$.

$$t_2 : x = \boxed{} y + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} 2^k ((1 - 3i)z - 5)^k$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n!}{2^n n^n} (z + 3 + 2i)^{5n}$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 18x \sin(9x^2) dx =$

(b) $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+4} dx =$

(c) $\int \frac{2x-1}{x^2+4x+5} dx =$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (e^x + e^{-x})(2y^3 - 6y).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$\text{grad } f(x, y) =$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f .

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$

,

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x, y)$.

$Hf(x, y) =$

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$

Name, Matrikel- Studien-
 Vorname: Nummer: gang:

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

| | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| x | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x \sin(x)}{\sin(5x)} = \boxed{}$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{4x+9}} = \boxed{}$

(c) $\int_5^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \boxed{}$ (d) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \boxed{}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9 + \frac{4}{n}} - 3 \right) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{3} \cos(2n! \pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{}, \quad h_2 = \boxed{}, \quad h_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (1, 7) : x \mapsto \frac{7x + 1}{x + 1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1) = 4$.

(a) Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{}$, $(f^{-1})'(4) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1, 4)$.

$$t_1 : y = \boxed{} x + \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente t_2 an den Graphen von $f^{-1} : (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(4, 1)$.

$$t_2 : x = \boxed{} y + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} 3^k ((1 + 3i)z - 5)^k$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n!}{3^n n^n} (z + 2 - 4i)^{3n}$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 14x \sin(7x^2) dx =$

(b) $\int \frac{2x - 2}{x^2 + 4x + 4} dx =$

(c) $\int \frac{2x - 2}{x^2 + 4x + 5} dx =$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (e^x + e^{-x}) (y^3 - 12y).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$\text{grad } f(x, y) =$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f .

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$

,

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x, y)$.

$Hf(x, y) =$

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) =$

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

| | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| x | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} \frac{x \sin(x)}{\sin(3x)} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x+4}}{\sqrt{x+5}} =$

(c) $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9 + \frac{3}{n}} - 3 \right) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{4} \cos(2n! \pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{}, \quad h_2 = \boxed{}, \quad h_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-2, 8) : x \mapsto \frac{8x - 2}{x + 1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : (-2, 8) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1) = 3$.

(a) Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{}$, $(f^{-1})'(3) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1, 3)$.

$$t_1 : y = \boxed{} x + \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente t_2 an den Graphen von $f^{-1} : (-2, 8) \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(3, 1)$.

$$t_2 : x = \boxed{} y + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} 2^k ((1 - 3i)z + 5)^k$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n!}{2^n n^n} (z + 2 + 3i)^{3n}$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 10x \sin(5x^2) dx =$

(b) $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 4x + 4} dx =$

(c) $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 4x + 5} dx =$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (e^x + e^{-x}) \left(\frac{1}{3} y^3 - 9y \right).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$\text{grad } f(x, y) =$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f .

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$

,

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x, y)$.

$Hf(x, y) =$

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) =$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha : \mathbb{R} \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x \ln(y+1) \\ \frac{x^2}{y+1} + 2z^2 \\ \alpha^2 yz + \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von g_α .

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x, y, z) =$$

(b) Für welche Parameter α besitzt g_α ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \begin{array}{c} \boxed{} \\ \end{array} \right\}$$

(c) Berechnen Sie für $\alpha = 2$ ein Potential U von g_2 .

$$U(x, y, z) =$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent“ oder „divergent“ in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

| | | | | | | |
|-----|--|-----|---|----------|---|---|
| (a) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(5n)}}$ | ist | <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 40px;"></div> | nach dem | <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 40px;"></div> | . |
| (b) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+2}}$ | ist | <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 40px;"></div> | nach dem | <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 40px;"></div> | . |

Name,
 Vorname:

Matrikel-
 Nummer:

Studien-
 gang:

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------|
| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Summe |
| Punkte | /1 | /4 | /3 | /4 | /4 | /5 | /4 | /4 | /2 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
 Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|-----------|------------------------|-----------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sinh x$ | $\operatorname{arsinh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos x$ | $\arctan x$ | $\cosh x$ | $\operatorname{arcosh} x$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ | $\sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

| | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| x | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} \frac{x \sin(x)}{\sin(5x)} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+9}}{\sqrt{x+5}} =$

(c) $\int_3^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$

(d) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{9 + \frac{2}{n}} - 3 \right) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie drei Häufungspunkte $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, wobei

$$a_n = \frac{1}{5} \cos(2n! \pi) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

$$h_1 = \boxed{}, \quad h_2 = \boxed{}, \quad h_3 = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (2, 8) : x \mapsto \frac{8x + 2}{x + 1}$$

besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : (2, 8) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Es gilt $f(1) = 5$.

(a) Berechnen Sie: $f'(x) = \boxed{}$, $(f^{-1})'(5) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1, 5)$.

$$t_1 : y = \boxed{} x + \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Tangente t_2 an den Graphen von $f^{-1} : (2, 8) \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto x = f^{-1}(y)$ im Punkt $(5, 1)$.

$$t_2 : x = \boxed{} y + \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) $\sum_{k=3}^{\infty} 3^k ((1 + 3i)z + 5)^k$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n!}{3^n n^n} (z + 4 - 2i)^{5n}$: $z_0 = \boxed{}$, $\rho = \boxed{}$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int 6x \sin(3x^2) dx =$

(b) $\int \frac{2x - 4}{x^2 + 4x + 4} dx =$

(c) $\int \frac{2x - 4}{x^2 + 4x + 5} dx =$

Aufgabe 7 (4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (e^x + e^{-x}) \left(\frac{1}{4} y^3 - 12y \right).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$\text{grad } f(x, y) =$

(b) Bestimmen Sie die beiden kritischen Stellen von f .

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$

,

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

(c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $Hf(x, y)$.

$Hf(x, y) =$

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

$T_2\left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) =$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$g_\alpha : \mathbb{R} \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x \ln(y+1) \\ \frac{x^2}{y+1} + \frac{1}{2}z^2 \\ \alpha^2 yz + \sin(z) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von g_α .

$$\operatorname{rot} g_\alpha(x, y, z) =$$

(b) Für welche Parameter α besitzt g_α ein Potential?

$$\alpha \in \left\{ \begin{array}{c} \boxed{} \\ \end{array} \right\}$$

(c) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ ein Potential U von g_1 .

$$U(x, y, z) =$$

Aufgabe 9 (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

Tragen Sie jeweils „konvergent“ oder „divergent“ in das linke Kästchen ein, und geben Sie im rechten Kästchen ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz bzw. Divergenz folgt.

| | | | | | | |
|-----|--|-----|--|----------|--|---|
| (a) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$ | ist | | nach dem | | . |
| (b) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(2n)}}$ | ist | | nach dem | | . |