Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\pi^{n+1}}{\sqrt{2}^n} + \dfrac{\pi^n}{\sqrt{2}^{n+1}}}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}+1} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}+1}\right)$

Aufgabe 9 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(z + 8\mathrm{i} - 7)^2}{5}\right)^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4\mathrm{i}\,z - 12 + 4\sqrt{2}\,\mathrm{i})^n}{1 + 3^n}$
z_0		
ρ		

Aufgabe 10 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Geben Sie alle möglichen Werte an, durch die sich die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle 0 fortsetzen lassen. (Tragen Sie „keine“ ein, falls sich die Funktion nicht stetig fortsetzen lässt.)

$\dfrac{x^{7457}}{\lvert x\rvert^{7457}}$	$\dfrac{-6x^2 - 1 + \cos(8x)}{2x^2 + 3x^8}$

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\dfrac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)
Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

☐ ja ☐ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-(9x^2+y^2)} + 1.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die kritischen Stellen von f an.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{x^2-\pi^2}{\sin(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{\lvert x\rvert}} - \dfrac{2}{\lvert x\rvert}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+5}{2(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[5]{x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n>2}$ und $(b_n)_{n>0}$ durch

$$a_n = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{k} \dfrac{1}{3^j} & \text{für } n = 2k\,, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{1}{3^j} & \text{für } n = 2k+1\,, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n \frac{2n}{6n+7}.$$

Berechnen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \boxed{} \qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \boxed{} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{8x+15y} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2-1$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x, y und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben.

(b) Finden Sie alle $\binom{x}{y}$ so, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, das dieses Gleichungssystem löst:

(c) Finden Sie den kleinsten Wert, den f auf dem Kreis $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ annimmt, und geben Sie einen Punkt $\binom{x_0}{y_0} \in K$ an, wo dieser angenommen wird.

$$\min_{\binom{x}{y}\in K} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ wird angenommen für } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{3}{7}\right)^n$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi^{n+1}}{\sqrt{3}^n} + \frac{\pi^n}{\sqrt{3}^{n+1}}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\pi^{\frac{1}{n}+1}} - \sqrt{\pi^{\frac{1}{n+1}+1}}\right)$

Aufgabe 9 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z+7\mathrm{i}+8)^2}{6}\right)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5\mathrm{i}\, z - 15 - 10\sqrt{3}\,\mathrm{i})^n}{1+2^n}$
z_0		
ρ		

Aufgabe 10 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Geben Sie alle möglichen Werte an, durch die sich die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle 0 fortsetzen lassen. (Tragen Sie „keine“ ein, falls sich die Funktion nicht stetig fortsetzen lässt.)

$\frac{-7x^2 - 1 + \cos(5x)}{9x^2 + 2x^6}$	$\frac{x^{8405}}{\lvert x\rvert^{8405}}$

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

☐ ja ☐ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2\,\mathrm{e}^{-(4x^2+y^2)} + 2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die kritischen Stellen von f an.

$\boxed{}$

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{6}{\lvert x\rvert}} - \frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{x^2 - \frac{9\pi^2}{4}}{\cos(x)}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+4}{2(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,\sqrt[7]{x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n>2}$ und $(b_n)_{n>0}$ durch

$$a_n = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{4^j} & \text{für } n = 2k\,, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{4^j} & \text{für } n = 2k+1\,, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n \frac{2n}{10n+9}.$$

Berechnen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \boxed{} \qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \boxed{} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{5x+12y} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x, y und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben.

$\boxed{}$

(b) Finden Sie alle $\binom{x}{y}$ so, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, das dieses Gleichungssystem löst:

$\boxed{}$

(c) Finden Sie den größten Wert, den f auf dem Kreis $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ annimmt, und geben Sie einen Punkt $\binom{x_0}{y_0} \in K$ an, wo dieser angenommen wird.

$$\max_{\binom{x}{y}\in K} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ wird angenommen für } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Berechnen Sie:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\pi^{\frac{1}{n}+1}-\pi^{\frac{1}{n+1}+1}\right)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{7}{6}\right)^n$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\pi^{n+1}}{\sqrt{5}^n}+\frac{\pi^n}{\sqrt{5}^{n+1}}}$

Aufgabe 9 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+6\mathrm{i}-5)^2}{7}\right)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\mathrm{i}\,z+8-12\sqrt{2}\,\mathrm{i})^n}{1+5^n}$
z_0		
ρ		

Aufgabe 10 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Geben Sie alle möglichen Werte an, durch die sich die folgenden Funktionen $\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ stetig an der Stelle 0 fortsetzen lassen. (Tragen Sie „keine“ ein, falls sich die Funktion nicht stetig fortsetzen lässt.)

$\frac{x^{8609}}{\lvert x\rvert^{8609}}$	$\frac{3x^2-1+\cos(3x)}{4x^2+6x^4}$

☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Gruppe:

☐0	☐0
☐1	☐1
☐2	☐2
☐3	☐3
☐4	☐4
☐5	☐5
☐6	☐6
☐7	☐7
☐8	☐8
☐9	☐9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)
Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

☐ ja ☐ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto y^2\,\mathrm{e}^{-(x^2+9y^2)} + 3.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die kritischen Stellen von f an.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{\lvert x\rvert}} - \frac{1}{\lvert x\rvert}$	$\lim\limits_{x\to -2\pi} \frac{x^2-4\pi^2}{\sin(x)}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+2}{2(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \sqrt[4]{x}\,\sqrt[5]{x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n>2}$ und $(b_n)_{n>0}$ durch

$$a_n = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{5^j} & \text{für } n = 2k\,, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{5^j} & \text{für } n = 2k+1\,, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n \frac{3n}{6n+7}.$$

Berechnen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \boxed{} \qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \boxed{} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \mathrm{e}^{15x-8y} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto x^2+y^2-1$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x, y und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben.

(b) Finden Sie alle $\binom{x}{y}$ so, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, das dieses Gleichungssystem löst:

(c) Finden Sie den größten Wert, den f auf dem Kreis $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ annimmt, und geben Sie einen Punkt $\binom{x_0}{y_0} \in K$ an, wo dieser angenommen wird.

$$\max_{\binom{x}{y}\in K} f\binom{x}{y} = \boxed{} \text{ wird angenommen für } \binom{x_0}{y_0} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\pi^{n+1}}{\sqrt{7}^n} + \dfrac{\pi^n}{\sqrt{7}^{n+1}}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}+1}} - \sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}+1}}\right)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(z+2\mathrm{i}+6)^2}{11}\right)^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3\mathrm{i}\, z + 9 + 6\sqrt{5}\,\mathrm{i})^n}{1+4^n}$
z_0		
ρ		

Aufgabe 10 (2 Punkte)

0 1 2

Geben Sie alle möglichen Werte an, durch die sich die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle 0 fortsetzen lassen. (Tragen Sie „keine“ ein, falls sich die Funktion nicht stetig fortsetzen lässt.)

$\dfrac{3x^2 - 1 + \cos(4x)}{5x^2 + 3x^4}$	$\dfrac{x^{4581}}{\lvert x\rvert^{4581}}$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 2** **13. 7. 2024**

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Gruppe:

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

☐ ja ☐ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Gegeben sei die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y^2\, \mathrm{e}^{-(x^2+4y^2)} + 4.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die kritischen Stellen von f an.

Aufgabe 4 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2-\frac{\pi^2}{4}}{\cos(x)}$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{\lvert x\rvert}} - \dfrac{1}{\lvert x\rvert}$

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int \frac{x+2}{2(x-3)(x-2)}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int \sqrt[4]{x}\,\sqrt[7]{x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n>2}$ und $(b_n)_{n>0}$ durch

$$a_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{6^j} & \text{für } n = 2k\,, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{6^j} & \text{für } n = 2k+1\,, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad b_n = (-1)^n \frac{3n}{12n+5}.$$

Berechnen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \boxed{} \qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n = \boxed{} \qquad \varlimsup_{n\to\infty} b_n = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Gegeben sind die folgenden Abbildungen.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{12x-5y} \qquad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2+y^2-1$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen (in x, y und λ) an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ beschreiben.

(b) Finden Sie alle $\binom{x}{y}$ so, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, das dieses Gleichungssystem löst:

(c) Finden Sie den kleinsten Wert, den f auf dem Kreis $K = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\binom{x}{y} = 0 \right\}$ annimmt, und geben Sie einen Punkt $\binom{x_0}{y_0} \in K$ an, wo dieser angenommen wird.

$$\min_{\binom{x}{y}\in K} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ wird angenommen für } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boxed{}$$