Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^5+6n^2+2n+7}{10n^5+19n^4+n^3} =$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} =$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mathrm{i}}{3}\right)^n =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$a \in$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $\mathrm{L}\,(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a.

$\dim \mathrm{L}\,(u, v, w) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 + 3b_2$ des $\mathbb{R}^2$. Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$ an.

${}_B\mathrm{id}_C =$ $\boxed{}$, ${}_C\mathrm{id}_B =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

${}_C\varphi_B =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 - 3b_2) = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$ gilt.

$\alpha =$ $\boxed{}$, $\beta =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-5 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x = 0 \right\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$		

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$		

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+6} \leqq 3 \quad : \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $\left|\varphi((3,3,3,3)^\intercal)\right|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{}, \qquad \left|\varphi((3,3,3,3)^\intercal)\right| = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 16x_1 + x_2 + 34 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an.

Euklidische Normalform:

Q: $\boxed{}$, $F =$ $\boxed{}$, $t =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 3\sqrt{3})^3 = 27\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{s+7} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$. $s =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$ mit $b = (1, 0, 1)^\intercal$.

$\mathcal{L}(S) =$ $\boxed{}$

(c) Es gilt $\det(A - \mathrm{E}_3) = -\frac{1}{4}$. Berechnen Sie:

$\det(A) =$ $\boxed{}$, $\det(A^4 - A^3) =$ $\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Übungsgruppe:** ☐

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^5+3n^2+5n+71}{3n^5+9n^4+2n^3} = \boxed{}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n+5^n+6^n} = \boxed{}$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\mathrm{i}}{3}\right)^n = \boxed{}$$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$a \in$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $\mathrm{L}(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a.

$\dim \mathrm{L}(u, v, w) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 + 2b_2$ des $\mathbb{R}^2$. Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$ an.

${}_B\mathrm{id}_C =$ $\boxed{}$, ${}_C\mathrm{id}_B =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

${}_C\varphi_B =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 + 3b_2) = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$ gilt.

$\alpha =$ $\boxed{}$, $\beta =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-6 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^\intercal A x + 2a^\intercal x = 0 \right\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$		

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$		

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteqq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+8} \leqq 5 \quad : \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $\left|\varphi((4,4,4,4)^\intercal)\right|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{}, \qquad \left|\varphi((4,4,4,4)^\intercal)\right| = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 14 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an.

Euklidische Normalform:

Q: $\boxed{}$, $F = \boxed{}$, $t = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 4\sqrt{3})^3 = 27\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{}$, $z_2 = \boxed{}$, $z_3 = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{s+6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}\,.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$. $s = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$ mit $b = (1, 1, 0)^\intercal$.

$\mathcal{L}(S) = \boxed{}$

(c) Es gilt $\det(A - \mathrm{E}_3) = \frac{3}{4}$. Berechnen Sie:

$\det(A) = \boxed{}$, $\det(A^4 - A^3) = \boxed{}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^5+2n^2+23n+7}{4n^5+n^4+9n^3} =$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+6^n+7^n} =$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{4}\right)^n =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} a \\ 4a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$a \in$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $\mathrm{L}(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a.

$\dim \mathrm{L}(u, v, w) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sind zwei Basen $B: b_1, b_2$ und $C: c_1 = b_1,\ c_2 = b_1 - 3b_2$ des $\mathbb{R}^2$. Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$ an.

${}_B\mathrm{id}_C =$ $\boxed{}$, ${}_C\mathrm{id}_B =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

${}_C\varphi_B =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(3b_1 - 2b_2) = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$ gilt.

$\alpha =$ $\boxed{}$, $\beta =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-7 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x = 0 \right\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$		

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$		

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+6} \leqq 4 \quad : \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $\left|\varphi((5,5,5,5)^\intercal)\right|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{}, \qquad \left|\varphi((5,5,5,5)^\intercal)\right| = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -2x_1^2 - 16x_1 + x_2 - 28 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an.

Euklidische Normalform:

Q: $\boxed{}$, $F = \boxed{}$, $t = \boxed{}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 5\sqrt{3})^3 = 27\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 = \boxed{}$, $z_2 = \boxed{}$, $z_3 = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{s+4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$. $s = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$ mit $b = (1, 0, 1)^\intercal$.

$\mathcal{L}(S) = \boxed{}$

(c) Es gilt $\det(A - \mathrm{E}_3) = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie:

$\det(A) = \boxed{}$, $\det(A^4 - A^3) = \boxed{}$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5 + 3n^2 + 2n + 8}{2n^5 + 4n^4 + 2n^3} =$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n + 8^n} =$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mathrm{i}}{4}\right)^n =$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} a \\ 5a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$a \in$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $\mathrm{L}(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a.

$\dim \mathrm{L}(u, v, w) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 - 2b_2$ des $\mathbb{R}^2$. Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$ an.

${}_B\mathrm{id}_C =$ $\boxed{}$, ${}_C\mathrm{id}_B =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

${}_C\varphi_B =$ $\boxed{}$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 + 3b_2) = \alpha\, b_1 + \beta\, b_2$ gilt.

$\alpha =$ $\boxed{}$, $\beta =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4-t \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-8 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x = 0 \right\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$		

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$		

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteqq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+4} \leqq 3 \quad : \qquad \mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 7 (*2 Punkte*) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $\left|\varphi((6,6,6,6)^\intercal)\right|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{}, \qquad \left|\varphi((6,6,6,6)^\intercal)\right| = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 20 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$, in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon {}_{\mathbb{F}}v \mapsto F\,{}_{\mathbb{F}}v + t$ an.

Euklidische Normalform:

Q: $\boxed{}$, $F =$ $\boxed{}$, $t =$ $\boxed{}$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 6\sqrt{3})^3 = 27\mathrm{i}$$

in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$z_1 =$ $\boxed{}$, $z_2 =$ $\boxed{}$, $z_3 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{s+5} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$. $s =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S : Ax = b$ mit $b = (1, 1, 0)^\intercal$.

$\mathcal{L}(S) =$ $\boxed{}$

(c) Es gilt $\det(A - \mathrm{E}_3) = -\frac{1}{2}$. Berechnen Sie:

$\det(A) =$ $\boxed{}$, $\det(A^4 - A^3) =$ $\boxed{}$
