

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 6n^2 + 2n + 7}{10n^5 + 19n^4 + n^3} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} = \boxed{5}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{3}\right)^n = \boxed{\frac{6-3i}{5}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$$a \in \boxed{\{0, 3\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $L(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a .

$$\dim L(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{für } a = 0 \\ 2, & \text{für } a = 3 \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 + 3b_2$ des \mathbb{R}^2 .

Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\text{id}_C$ und ${}_C\text{id}_B$ an.

$${}_B\text{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_C\text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

$${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 - 3b_2) = \alpha b_1 + \beta b_2$ gilt.

$$\alpha = \boxed{-5}, \quad \beta = \boxed{3}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-5 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x = 0\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$	$\{5\}$	$\{1\}$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+6} \leq 3 \quad : \quad \mathcal{L} = \boxed{(-\infty, -9] \cup (-6, +\infty)}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $|\varphi((3, 3, 3, 3)^\top)|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\varphi((3, 3, 3, 3)^\top)| = \boxed{6}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 16x_1 + x_2 + 34 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} v \mapsto F_{\mathbb{F}} v + t$ an.

Euklidische Normalform:

$$Q: \boxed{4w_1^2 + 2w_2 = 0}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 3\sqrt{3})^3 = 27i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{-\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_2 = \boxed{-\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_3 = \boxed{-3\sqrt{3} - 3i}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{s+7} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$.

$$s = \boxed{-3}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S: Ax = b$ mit $b = (1, 0, 1)^T$.

$$\mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}}$$

(c) Es gilt $\det(A - E_3) = -\frac{1}{4}$. Berechnen Sie:

$$\det(A) = \boxed{-4}, \quad \det(A^4 - A^3) = \boxed{16}$$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 + 3n^2 + 5n + 71}{3n^5 + 9n^4 + 2n^3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n + 6^n} = \boxed{6}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n = \boxed{\frac{6+3i}{5}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$$a \in \boxed{\{0, 5\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $L(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a .

$$\dim L(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{für } a = 0 \\ 2, & \text{für } a = 5 \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 + 2b_2$ des \mathbb{R}^2 .

Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\text{id}_C$ und ${}_C\text{id}_B$ an.

$${}_B\text{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_C\text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

$${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 + 3b_2) = \alpha b_1 + \beta b_2$ gilt.

$$\alpha = \boxed{-1}, \quad \beta = \boxed{7}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-6 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x = 0\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$	$\{6\}$	$\{2\}$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+8} \leq 5 \quad : \quad \mathcal{L} = \boxed{(-\infty, -10] \cup (-8, +\infty)}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $|\varphi((4, 4, 4, 4)^\top)|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\varphi((4, 4, 4, 4)^\top)| = \boxed{8}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 - 12x_1 + x_2 + 14 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} v \mapsto F_{\mathbb{F}} v + t$ an.

Euklidische Normalform:

$$Q: \boxed{4w_1^2 + 2w_2 = 0}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 4\sqrt{3})^3 = 27i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{-\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_2 = \boxed{-\frac{11}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_3 = \boxed{-4\sqrt{3} - 3i}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{s+6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$.

$$s = \boxed{-4}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S: Ax = b$ mit $b = (1, 1, 0)^T$.

$$\mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

(c) Es gilt $\det(A - E_3) = \frac{3}{4}$. Berechnen Sie:

$$\det(A) = \boxed{4}, \quad \det(A^4 - A^3) = \boxed{48}$$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5 + 2n^2 + 23n + 7}{4n^5 + n^4 + 9n^3} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n} = \boxed{7}$$

$$(c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{4}\right)^n = \boxed{\frac{6+2i}{5}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ 4a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$$a \in \boxed{\{0, 7\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $L(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a .

$$\dim L(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{für } a = 0 \\ 2, & \text{für } a = 7 \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 - 3b_2$ des \mathbb{R}^2 .

Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\text{id}_C$ und ${}_C\text{id}_B$ an.

$${}_B\text{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad {}_C\text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

$${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(3b_1 - 2b_2) = \alpha b_1 + \beta b_2$ gilt.

$$\alpha = \boxed{5}, \quad \beta = \boxed{5}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-7 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x = 0\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$	$\{7\}$	$\{3\}$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+6} \leq 4 \quad : \quad \mathcal{L} = \boxed{(-\infty, -8] \cup (-6, +\infty)}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $|\varphi((5, 5, 5, 5)^\top)|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\varphi((5, 5, 5, 5)^\top)| = \boxed{10}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 - 16x_1 + x_2 - 28 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation

$\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ an.

Euklidische Normalform:

$$Q: \boxed{-4w_1^2 + 2w_2 = 0}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 5\sqrt{3})^3 = 27i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{-\frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_2 = \boxed{-\frac{13}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_3 = \boxed{-5\sqrt{3} - 3i}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{s+4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$.

$$s = \boxed{-2}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S: Ax = b$ mit $b = (1, 0, 1)^T$.

$$\mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

(c) Es gilt $\det(A - E_3) = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie:

$$\det(A) = \boxed{2}, \quad \det(A^4 - A^3) = \boxed{2}$$

Name,
Vorname: Matrikel-
Nummer: Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte	/1	/3	/4	/4	/4	/2	/2	/3	/4	/4	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte könnten hilfreich sein.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (3 Punkte) Berechnen Sie:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^5 + 3n^2 + 2n + 8}{2n^5 + 4n^4 + 2n^3} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n + 8^n} = \boxed{8}$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{4}\right)^n = \boxed{\frac{6-2i}{5}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} a \\ 5a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind u, v, w linear abhängig?

$$a \in \boxed{\{0, 9\}}$$

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von u, v, w aufgespannten Untervektorraums $L(u, v, w)$ in Abhängigkeit von a .

$$\dim L(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{für } a = 0 \\ 2, & \text{für } a = 9 \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben sind zwei Basen $B : b_1, b_2$ und $C : c_1 = b_1, c_2 = b_1 - 2b_2$ des \mathbb{R}^2 .

Die Matrixbeschreibung ${}_B\varphi_B$ einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B sei

$${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ${}_B\text{id}_C$ und ${}_C\text{id}_B$ an.

$${}_B\text{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad {}_C\text{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_C\varphi_B$ an.

$${}_C\varphi_B = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(2b_1 + 3b_2) = \alpha b_1 + \beta b_2$ gilt.

$$\alpha = \boxed{1}, \quad \beta = \boxed{7}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Gegeben sind mit $t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4-t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ t-8 \end{pmatrix}$$

sowie die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top Ax + 2a^\top x = 0\}$.

(a) Für welche Werte von t ist A positiv definit bzw. indefinit?

	positiv definit	indefinit
$t \in$	$(-\infty, 4)$	$(4, +\infty)$

(b) Für welche Werte von t ist Q eine kegelige Quadrik bzw. eine parabolische Quadrik?

	kegelige Quadrik	parabolische Quadrik
$t \in$	$\{8\}$	$\{4\}$

Aufgabe 6 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichung.

$$\frac{x}{x+4} \leq 3 \quad : \quad \mathcal{L} = \boxed{(-\infty, -6] \cup (-4, +\infty)}$$

Aufgabe 7 (2 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : x \mapsto Ax$, mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und $|\varphi((6, 6, 6, 6)^\top)|$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\varphi((6, 6, 6, 6)^\top)| = \boxed{12}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben ist bezüglich des Standardkoordinatensystems \mathbb{E} die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -2x_1^2 - 12x_1 + x_2 - 20 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie ein kartesisches Koordinatensystem \mathbb{F} , in dem die Gleichung der Quadrik euklidische Normalform hat. Geben Sie diese Normalform sowie F und t für die Koordinatentransformation $\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{F} v \mapsto F_{\mathbb{F}} v + t$ an.

Euklidische Normalform:

$$Q: \boxed{-4w_1^2 + 2w_2 = 0}, \quad F = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z + 6\sqrt{3})^3 = 27i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \boxed{-\frac{9}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_2 = \boxed{-\frac{15}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i}, \quad z_3 = \boxed{-6\sqrt{3} - 3i}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{s+5} \end{pmatrix} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}.$$

(a) Bestimmen Sie s so, dass $B = A^{-1}$.

$$s = \boxed{-1}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $S: Ax = b$ mit $b = (1, 1, 0)^T$.

$$\mathcal{L}(S) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

(c) Es gilt $\det(A - E_3) = -\frac{1}{2}$. Berechnen Sie:

$$\det(A) = \boxed{-2},$$

$$\det(A^4 - A^3) = \boxed{4}$$