



Aufgabe 8 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie zunächst $u = \sqrt{x}$ substituieren:

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \, dx = \int_0^{\pi} \boxed{2u \cos(u)} \, du$$

$$= \left[\boxed{2u \sin(u)} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \boxed{2 \sin(u)} \, du = \boxed{-4}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende Vektorfeld ein Potential $U_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (2y-1)(y-2\alpha x(1+x^2)^{-\alpha}) \\ 2(xy-(1+x^2)^\alpha) + (2y-1)x \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \boxed{\{0, \frac{1}{2}\}}$$

Bestimmen Sie für $\alpha = 0$ ein zugehöriges Potential U_0 , so dass $U_0\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 17$ gilt:

$$U_0\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \boxed{2xy^2 - xy - 2y + 18}$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

0 1 2

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = e^{-3\sin(x)\cos(x)}$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f :

$$f'(x) = \boxed{3(\sin^2(x) - \cos^2(x))e^{-3\sin(x)\cos(x)}}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Stufe um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$:

$$T_1(f, x, \pi) = \boxed{1 - 3(x - \pi)}$$

Schein-Nachklausur

Höhere Mathematik 2

19. 7. 2024

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

1 2 3 4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppennummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Matrikelnummer:

Gruppe:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Berechnen Sie:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(-\frac{1}{16}\right)^j \frac{(5\pi)^{2j}}{(2j)!}$	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t\pi)}{t}$	$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1) \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	π	$\pi - 2$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$.

	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z + 1 - 2i)^n}{ 1 - i ^{n+1}}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 8^n (z - 2i - 1)^{3n}$
z_0	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$	$1 + 2i$
ρ	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

0 1 2 3

Gegeben sind die Folgen:

$$a_n = \left| i^n - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} & \text{für } n = 2k, k > 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} & \text{für } n = 2k + 1, k \geq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \boxed{\frac{1}{32}}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

0 1 2 3

Geben Sie alle möglichen Werte an, durch die sich die folgenden Funktionen $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in 0 fortsetzen lassen. (Tragen Sie „keine“ ein, falls sich die Funktion nicht stetig fortsetzen lässt.)

$\frac{(\pi x)^{5432}}{ x ^{5432}}$	$\frac{\sqrt[3]{x^7} - 1 + \cos(-3x)}{2x^2 + 6x^4}$	$\frac{\ln(x^{2024}) - x^3 - x}{x}$
π^{5432}	$-\frac{9}{4}$	keine

Aufgabe 6 (2 Punkte)

0 1 2

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x) + 3x^3}{(2x)^3 + 4x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \sqrt{e^{2x} - e^x}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Gegeben sei die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto ze^{(x-1)^2 + y^2 - z^2 - z}$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{(x-1)^2 + y^2 - z^2 - z} \begin{pmatrix} 2(x-1)z \\ 2yz \\ 1 - 2z^2 - z \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie die kritischen Stellen von f an.

$$\boxed{(1, 0, -1)^T \text{ und } (1, 0, \frac{1}{2})^T}$$