Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} (n2^{2n})^{\frac{1}{n}}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3+4n^2-1}{2n^3+1}$
4	3

Aufgabe 9 (2 Punkte) ☐0 ☐1 ■2

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta\colon u, v, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{5, -6\}}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_\alpha = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle u \mid w_\alpha \rangle = \boxed{\alpha^2 - 3\alpha - 10}$.

(b) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u und w_α orthogonal sind: $\alpha \in \left\{ \boxed{-2,\ 5} \right\}$.

(c) Bestimmen Sie neue Werte von α so, dass v_α die Länge 1 hat: $\alpha \in \left\{ \boxed{-2,\ 2} \right\}$.

(d) Sei nun $\alpha = 0$.

Geben Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen u und w_0 an: $\cos\varphi = \boxed{-\frac{2}{\sqrt{14}}}$.

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **14. 12. 2024**

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 3 (4 Punkte) 0 1 2 3 4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$2^{\lvert x-1\rvert} < 16$	$\lvert 2x+1\rvert \geqq \lvert 3x-5\rvert$
$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle\vert\, -3 < x < 5\right\}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle\vert\, \frac{4}{5} \leqq x \leqq 6\right\}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

(a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen A und B und berechnen Sie die folgenden Summen.

$\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+2}$	$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k-1}{k!}$
$A = \frac{1}{3}; \quad B = -\frac{1}{3}$	$\frac{5}{34}$	$\mathrm{e} - 2$	$-2 + 3\mathrm{e}$

(b) Geben Sie für die untenstehende Folge den Grenzwert an oder tragen Sie "divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 4}{n^2} + (-1)^n 3\cos(n\pi)$
3

Aufgabe 5 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \frac{3\mathrm{i} - 1}{2\mathrm{i} + 1} = \boxed{1 + \mathrm{i}} \qquad z_2 = \frac{-(1+\mathrm{i})^4}{4} + 3\mathrm{i} = \boxed{1 + 3\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)$ in Polarkoordinaten an (mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$).

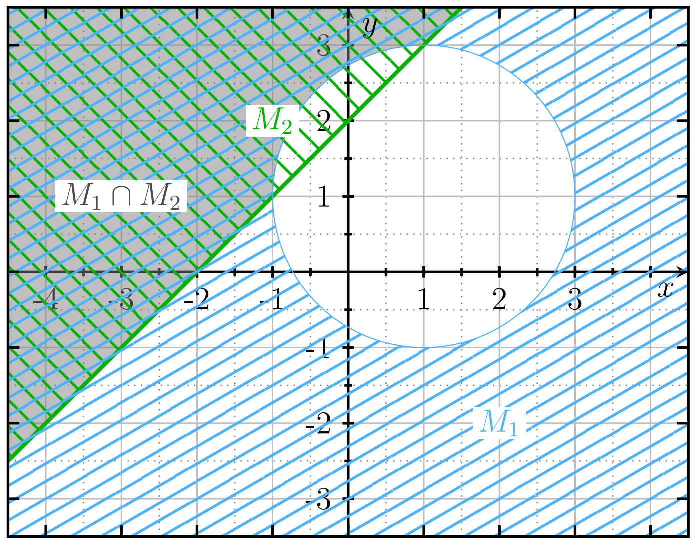
$$w_1 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{15}{8}\pi\right)\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) 0 1 2 3 4 5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle\vert\, x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \geqq 0 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle\vert\, x - y \leqq -2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$ in der reellen Ebene.



Aufgabe 7 (3 Punkte) 0 1 2 3

Gegeben seien die Gerade g und der Punkt Q in $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{wobei} \quad P = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, der zu $\overrightarrow{PQ}$ und zu v orthogonal ist.

$$n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{77}} \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} (n3^{2n})^{\frac{1}{n}}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3 - 3n^2 - 1}{2n^3 + 5}$
9	4

Aufgabe 9 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta\colon u, v, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{2, -3\}}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Gegeben seien

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_\alpha = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle u \,|\, w_\alpha \rangle = \boxed{\alpha^2 + 5\alpha - 14}$.

(b) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u und w_α orthogonal sind: $\alpha \in \left\{ \boxed{-7,\ 2} \right\}$.

(c) Bestimmen Sie neue Werte von α so, dass v_α die Länge 1 hat: $\alpha \in \left\{ \boxed{-3,\ 3} \right\}$.

(d) Sei nun $\alpha = 0$.

Geben Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen u und w_0 an: $\cos\varphi = \boxed{-\dfrac{2}{\sqrt{30}}}$.

□1 ■2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$3^{\lvert x-1\rvert} < 27$	$\lvert 2x-1\rvert \geqq \lvert 3x-6\rvert$
$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 < x < 4\right\}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{7}{5} \leqq x \leqq 5\right\}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen A und B und berechnen Sie die folgenden Summen.

$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$	$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k!}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k-2}{k!}$
$A = \frac{1}{2}; \quad B = -\frac{1}{2}$	$\frac{5}{11}$	$-4+2\mathrm{e}$	$1+\mathrm{e}$

(b) Geben Sie für die untenstehende Folge den Grenzwert an oder tragen Sie "divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 10}{\sqrt{n}} + (-1)^n 4\cos(n\pi)$
4

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \frac{6\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}+1} = \boxed{2+2\mathrm{i}} \qquad z_2 = \frac{-(1-\mathrm{i})^4}{2} + 5\mathrm{i} = \boxed{2+5\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = \frac{5}{2}\left(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$ in Polarkoordinaten an (mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$).

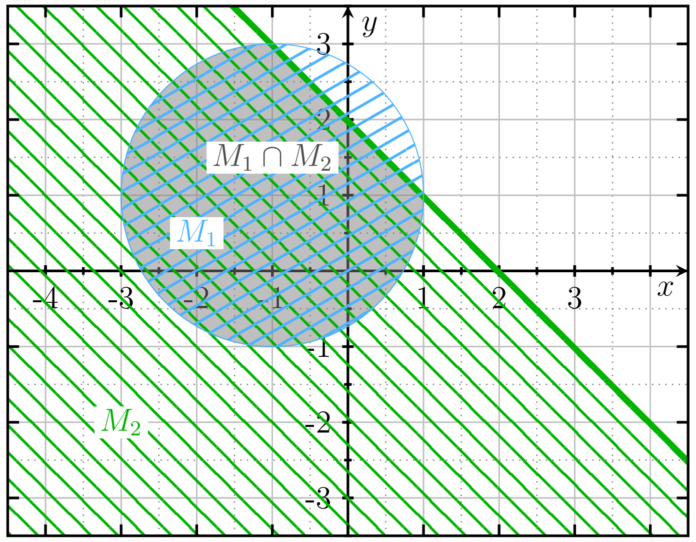
$$w_1 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 \leqq 0 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y \leqq 2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$ in der reellen Ebene.



Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien die Gerade g und der Punkt Q in $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{wobei} \quad P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, der zu $\overrightarrow{PQ}$ und zu v orthogonal ist.

$$n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{94}} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Berechnen Sie:

$\lim_{n\to\infty} (n4^{2n})^{\frac{1}{n}}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3+5n^2-1}{2n^3+7}$
16	5

Aufgabe 9 (2 Punkte) □0 □1 ■2

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta : u, v, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$\mathbb{R} \setminus \{3, -4\}$

Aufgabe 10 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Gegeben seien

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_\alpha = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle u \,|\, w_\alpha \rangle = \boxed{\alpha^2 + 3\alpha - 18}$.

(b) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u und w_α orthogonal sind: $\alpha \in \left\{ \boxed{-6,\ 3} \right\}$.

(c) Bestimmen Sie neue Werte von α so, dass v_α die Länge 1 hat: $\alpha \in \left\{ \boxed{-6,\ 6} \right\}$.

(d) Sei nun $\alpha = 0$.

Geben Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen u und w_0 an: $\cos\varphi = \boxed{-\frac{6}{\sqrt{46}}}$.

□1 □2 ■3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$4^{\lvert x-1\rvert} < 16$	$\lvert 2x+5\rvert \geqq \lvert 3x-8\rvert$
$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 < x < 3\right\}$	$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3}{5} \leqq x \leqq 13\right\}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen A und B und berechnen Sie die folgenden Summen.

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k!}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k-3}{k!}$	$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}$	$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$
$-6+3\mathrm{e}$	$4-\mathrm{e}$	$A = \frac{1}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$	$\frac{5}{16}$

(b) Geben Sie für die untenstehende Folge den Grenzwert an oder tragen Sie "divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$a_n = \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 1}{n} + 5(-1)^{n+1} \cos(n\pi)$
-5

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \frac{1-3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}+1} = \boxed{-1-\mathrm{i}} \qquad z_2 = \frac{(1+\mathrm{i})^4}{4} + 3\mathrm{i} = \boxed{-1+3\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = \frac{7}{2}\left(-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$ in Polarkoordinaten an (mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$).

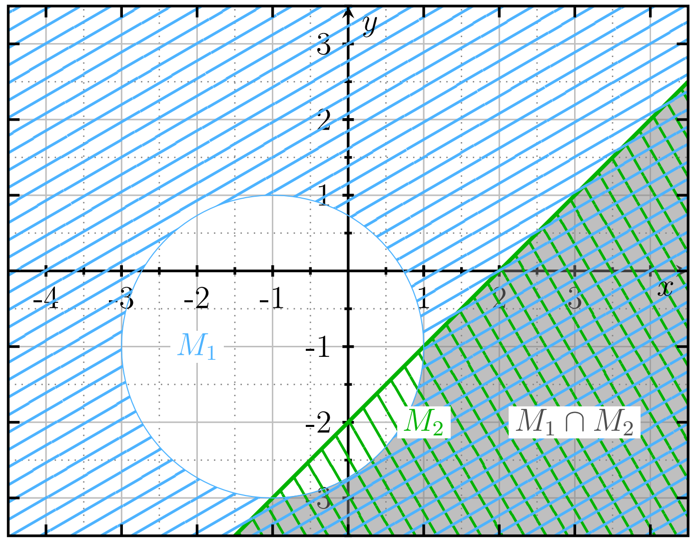
$$w_1 = \sqrt{7}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \sqrt{7}\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 \geqq 0 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y \geqq 2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$ in der reellen Ebene.



Aufgabe 7 (3 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ■3

Gegeben seien die Gerade g und der Punkt Q in $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ wobei } P = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, der zu $\overrightarrow{PQ}$ und zu v orthogonal ist.

$$n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte) ☐ 0 ☐ 1 ■ 2

Berechnen Sie:

$\lim\limits_{n\to\infty} (n5^{2n})^{\frac{1}{n}}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n^3 - 7n^2 - 1}{2n^3 - 1}$
25	6

Aufgabe 9 (2 Punkte) ☐ 0 ☐ 1 ■ 2

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ ein Parameter und seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die $B_\beta \colon u, v, w$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \{4, -5\}}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte) ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4

Gegeben seien

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_\alpha = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle u \,|\, w_\alpha \rangle = \boxed{\alpha^2 + 2\alpha - 48}$.

(b) Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass u und w_α orthogonal sind: $\alpha \in \left\{ \boxed{-8, 6} \right\}$.

(c) Bestimmen Sie neue Werte von α so, dass v_α die Länge 1 hat: $\alpha \in \left\{ \boxed{-4, 4} \right\}$.

(d) Sei nun $\alpha = 0$.

Geben Sie den Cosinus des Winkels φ zwischen u und w_0 an: $\cos\varphi = \boxed{-\dfrac{6}{\sqrt{41}}}$.

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **14. 12. 2024**

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐ 0 ■ 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0	☐ 0
☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1	☐ 1
☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2	☐ 2
☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3	☐ 3
☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4	☐ 4
☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5	☐ 5
☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6	☐ 6
☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7	☐ 7
☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8	☐ 8
☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9	☐ 9

Aufgabe 3 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$5^{\lvert x-2 \rvert} < 125$	$\lvert 2x+3 \rvert \geqq \lvert 3x-4 \rvert$
$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 < x < 5 \right\}$	$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{5} \leqq x \leqq 7 \right\}$

Aufgabe 4 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 ■5

(a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen A und B und berechnen Sie die folgenden Summen.

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k!}$	$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5k-4}{k!}$	$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k+3}$	$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
$-8+4\mathrm{e}$	$3+\mathrm{e}$	$A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$	$\frac{5}{39}$

(b) Geben Sie für die untenstehende Folge den Grenzwert an oder tragen Sie "divergent" ein, falls kein Grenzwert existiert.

$a_n = \frac{(-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2}{n^2} + 6(-1)^n \cos(n\pi)$
6

Aufgabe 5 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 ■5

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen z_1 und z_2 in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$z_1 = \frac{2-6\mathrm{i}}{2\mathrm{i}+1} = \boxed{-2-2\mathrm{i}} \qquad z_2 = \frac{(1-\mathrm{i})^4}{2} + 7\mathrm{i} = \boxed{-2+7\mathrm{i}}$$

(b) Geben Sie alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = \frac{11}{2}\left(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)$ in Polarkoordinaten an (mit $\arg(w) \in [0, 2\pi)$).

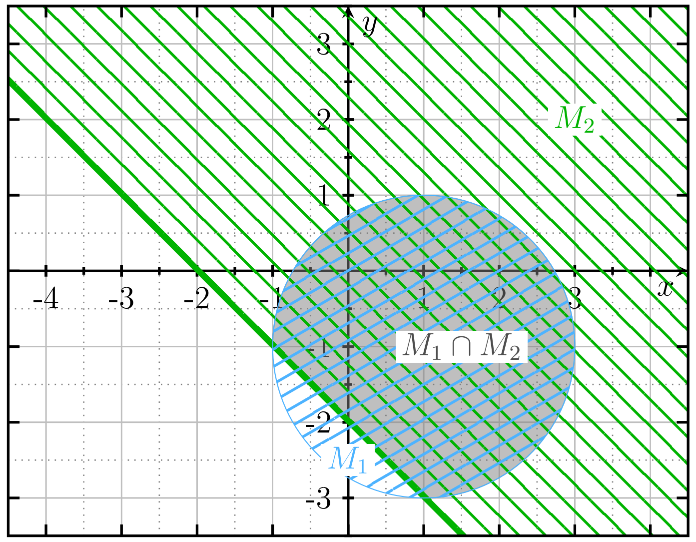
$$w_1 = \sqrt{11}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$$
$$w_2 = \sqrt{11}\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 ■5

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 \leqq 0 \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y \geqq -2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2$ in der reellen Ebene.



Aufgabe 7 (3 Punkte) □0 □1 □2 ■3

Gegeben seien die Gerade g und der Punkt Q in $\mathbb{R}^3$ durch

$$g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{wobei} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\overrightarrow{PQ} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}}$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, der zu $\overrightarrow{PQ}$ und zu v orthogonal ist.

$$n = \boxed{\frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}}$$