



**Aufgabe 7** (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Sei  $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$  das Standardkoordinatensystem für  $\mathbb{R}^2$ , und  $\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ :

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ :

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8** (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Betrachten Sie die Matrizen  $A_\alpha, B_\beta$  und die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Cv$  gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha - 7 & -2 \\ \alpha & -1 & \alpha - 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & \beta & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie  $\det(A_\alpha)$ :

$\det(A_\alpha) =$

(b) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $A_\alpha$  nicht regulär?

$\alpha \in \{-2, 3\}$

(c) Für welche Werte von  $\beta$  hat  $B_\beta$  eine Rechtsinverse?

$\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$

(d) Geben Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  des Kerns der Abbildung  $\varphi$  an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix  $C$  und die Dimension des Kerns:

$\mathcal{B}: \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\text{Rg}(C) =$    $\dim \text{Kern}(\varphi) =$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

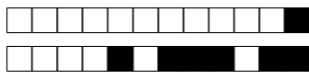
Matrikelnummer:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Aufgabe 2** (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

ja  nein



**Aufgabe 3** (4 Punkte)



Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

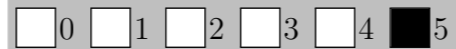
(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad B^T A = \text{nicht definiert} \quad B A^T = \begin{pmatrix} 11 & 28 & 21 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des folgenden Gleichungssystems:  $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)



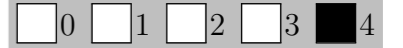
Gegeben sei die Basis  $B: b_1, b_2, b_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis  $V: v_1, v_2, v_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $L(b_1) = L(v_1)$  und  $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$ :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und betrachten Sie die Matrix  $A_{\alpha\beta}$  und den Vektor  $u$ :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ \alpha & 2 & -3 \\ \beta & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

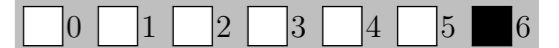
(a) Bestimmen Sie die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass  $A_{\alpha\beta}$  orthogonal ist:

$$\alpha = 6, \quad \beta = 3.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für  $\alpha$  und  $\beta$ , bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = 126, \quad A_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6** (6 Punkte)



Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A$ .

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{22}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{22}, \quad \lambda_3 = 3.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix  $B$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{5}$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$ .

Bestimmen Sie eine Basis  $V: v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$  von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$ :

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



**Aufgabe 7** (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Sei  $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$  das Standardkoordinatensystem für  $\mathbb{R}^2$ , und  $\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ :

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ :

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8** (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Betrachten Sie die Matrizen  $A_\alpha, B_\beta$  und die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Cv$  gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & \alpha + 4 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha - 2 \end{pmatrix}, \quad B_\beta = \begin{pmatrix} \beta & -3 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie  $\det(A_\alpha)$ :

$\det(A_\alpha) = \alpha^2 + 12\alpha - 13$

(b) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $A_\alpha$  nicht regulär?

$\alpha \in \{-13, 1\}$

(c) Für welche Werte von  $\beta$  hat  $B_\beta$  eine Linksinverse?

$\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}$

(d) Geben Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  des Kerns der Abbildung  $\varphi$  an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix  $C$  und die Dimension des Kerns:

$\mathcal{B}: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$       $\text{Rg}(C) = 1$       $\dim \text{Kern}(\varphi) = 3$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

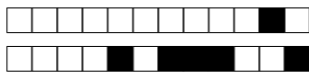
Matrikelnummer:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Aufgabe 2** (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

ja      nein



**Aufgabe 3** (4 Punkte)



Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

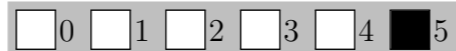
(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kästen ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 17 \end{pmatrix} \quad B^T A = \text{nicht definiert} \quad B^T B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des folgenden Gleichungssystems:  $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)



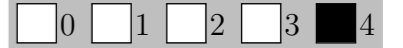
Gegeben sei die Basis  $B: b_1, b_2, b_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis  $V: v_1, v_2, v_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $L(b_1) = L(v_1)$  und  $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$ :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und betrachten Sie die Matrix  $A_{\alpha\beta}$  und den Vektor  $u$ :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \alpha & 6 & 2 \\ \beta & -3 & 6 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass  $A_{\alpha\beta}$  orthogonal ist:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 2.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für  $\alpha$  und  $\beta$ , bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = 109, \quad A_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6** (6 Punkte)



Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A$ .

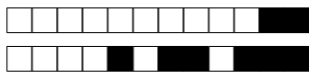
$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{14}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{14}, \quad \lambda_3 = 5.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix  $B$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 1 + \sqrt{10}$ .

Bestimmen Sie eine Basis  $V: v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$  von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$ :

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$





**Aufgabe 3** (4 Punkte)



Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

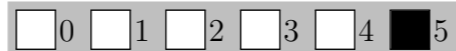
(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kästen ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$AB = \text{nicht definiert} \quad B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad AB^T = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des folgenden Gleichungssystems:  $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)



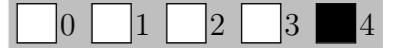
Gegeben sei die Basis  $B: b_1, b_2, b_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis  $V: v_1, v_2, v_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $L(b_1) = L(v_1)$  und  $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$ :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)



Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und betrachten Sie die Matrix  $A_{\alpha\beta}$  und den Vektor  $u$ :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & \alpha & -6 \\ 6 & \beta & 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

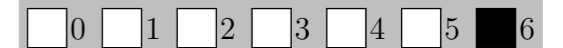
(a) Bestimmen Sie die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass  $A_{\alpha\beta}$  orthogonal ist:

$$\alpha = 2, \quad \beta = -3.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für  $\alpha$  und  $\beta$ , bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = 138, \quad A_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6** (6 Punkte)



Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A$ .

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{10}, \quad \lambda_3 = 7.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix  $B$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{5}$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$ .

Bestimmen Sie eine Basis  $V: v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$  von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$ :

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



**Aufgabe 7** (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Sei  $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$  das Standardkoordinatensystem für  $\mathbb{R}^2$ , und  $\mathbb{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$ :

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation  ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ :

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: v \mapsto -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 8** (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Betrachten Sie die Matrizen  $A_\alpha, B_\beta$  und die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto Cv$  gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ \alpha & 5 & 5 \\ 7 & \alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}, \quad B_\beta = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & \beta \\ 15 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie  $\det(A_\alpha)$ :

$\det(A_\alpha) =$

(b) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist  $A_\alpha$  nicht regulär?

$\alpha \in$

(c) Für welche Werte von  $\beta$  hat  $B_\beta$  eine Linksinverse?

$\beta \in$

(d) Geben Sie eine Basis  $\mathcal{B}$  des Kerns der Abbildung  $\varphi$  an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix  $C$  und die Dimension des Kerns:

$\mathcal{B}:$    $\text{Rg}(C) =$    $\dim \text{Kern}(\varphi) =$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen ausfüllen. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

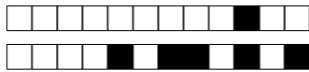
**Matrikelnummer:**

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

**Aufgabe 2** (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform [digital.mathematik.uni-stuttgart.de](https://digital.mathematik.uni-stuttgart.de) zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

ja  nein



**Aufgabe 3** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kästen ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$AB^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix} \quad B^T B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & 5 \\ -10 & 5 & 25 \end{pmatrix} \quad BB = \text{nicht definiert}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L}$  des folgenden Gleichungssystems:  $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

0  1  2  3  4  5

Gegeben sei die Basis  $B: b_1, b_2, b_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis  $V: v_1, v_2, v_3$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $L(b_1) = L(v_1)$  und  $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$ :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

0  1  2  3  4

Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und betrachten Sie die Matrix  $A_{\alpha\beta}$  und den Vektor  $u$ :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & \alpha \\ 3 & -2 & \beta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass  $A_{\alpha\beta}$  orthogonal ist:

$$\alpha = -3, \quad \beta = -6.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für  $\alpha$  und  $\beta$ , bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = 110, \quad A_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6** (6 Punkte)

0  1  2  3  4  5  6

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix  $A$ .

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{6}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}, \quad \lambda_3 = 11.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix  $B$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = 1 + \sqrt{10}$ .

Bestimmen Sie eine Basis  $V: v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$  von  $\mathbb{R}^3$  aus Eigenvektoren von  $B$ :

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$