Aufgabe 7 (4 Punkte) □0 □1 □2 □3 ■4

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (7 Punkte) □0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 ■7

Betrachten Sie die Matrizen A_α, B_β und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Cv$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2\alpha - 7 & -2 \\ \alpha & -1 & \alpha - 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & \beta & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$: $\det(A_\alpha) = \boxed{-2(\alpha^2 - \alpha - 6)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht regulär? $\boxed{\alpha \in \{-2, 3\}}$

(c) Für welche Werte von β hat B_β eine Rechtsinverse? $\boxed{\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}}$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns der Abbildung φ an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix C und die Dimension des Kerns:

$$\mathcal{B}\colon \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{Rg}(C) = \boxed{2} \qquad \dim \mathrm{Kern}(\varphi) = \boxed{2}$$

Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **01. 02. 2025**

■1 □2 □3 □4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) □0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

■ ja ■ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$B^\top B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}}$ $B^\top A =$ nicht definiert $BA^\top = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & 28 & 21 \end{pmatrix}}$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V\colon v_1, v_2, v_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$$v_1 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_2 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}, \quad v_3 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Matrix $A_{\alpha\beta}$ und den Vektor u:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ \alpha & 2 & -3 \\ \beta & -6 & 2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von α und β so, dass $A_{\alpha\beta}$ orthogonal ist:

$$\alpha = \boxed{6}, \quad \beta = \boxed{3}.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für α und β, bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = \boxed{126}, A_{\alpha\beta}^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{1 - \sqrt{22}}, \quad \lambda_2 = \boxed{1 + \sqrt{22}}, \quad \lambda_3 = \boxed{3}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix B sind gegeben durch $\lambda_1 = 1 - \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$. Bestimmen Sie eine Basis $V : v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$$v_{\lambda_1} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_2} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_3} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (7 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Betrachten Sie die Matrizen A_α, B_β und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Cv$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & \alpha+4 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha-2 \end{pmatrix}, \qquad B_\beta = \begin{pmatrix} \beta & -3 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$: $\det(A_\alpha) = \boxed{\alpha^2 + 12\alpha - 13}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht regulär? $\boxed{\alpha \in \{-13, 1\}}$

(c) Für welche Werte von β hat B_β eine Linksinverse? $\boxed{\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}}$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns der Abbildung φ an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix C und die Dimension des Kerns:

$$\mathcal{B}\colon \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{Rg}(C) = \boxed{1} \qquad \dim \mathrm{Kern}(\varphi) = \boxed{3}$$

☐1 ■2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

■ ja ■ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert" in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$BA = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 17 \end{pmatrix}}$ $\quad B^\top A = \boxed{\text{nicht definiert}}$ $\quad B^\top B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V\colon v_1, v_2, v_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$$v_1 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \quad v_2 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \quad v_3 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Matrix $A_{\alpha\beta}$ und den Vektor u:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \alpha & 6 & 2 \\ \beta & -3 & 6 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von α und β so, dass $A_{\alpha\beta}$ orthogonal ist:

$$\alpha = \boxed{3}, \quad \beta = \boxed{2}.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für α und β, bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = \boxed{109}, A_{\alpha\beta}^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{1 - \sqrt{14}}, \quad \lambda_2 = \boxed{1 + \sqrt{14}}, \quad \lambda_3 = \boxed{5}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix B sind gegeben durch $\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + \sqrt{10}$. Bestimmen Sie eine Basis $V : v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$$v_{\lambda_1} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_2} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_3} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

0 1 2 3 4

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6 7

Betrachten Sie die Matrizen A_α, B_β und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Cv$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & \alpha & -1 \\ -6 & \alpha+2 & \alpha-7 \end{pmatrix}, \quad B_\beta = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -8 & 6 & \beta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$: $\det(A_\alpha) = \boxed{-3(\alpha^2 - 6\alpha + 8)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht regulär? $\boxed{\alpha \in \{2, 4\}}$

(c) Für welche Werte von β hat B_β eine Rechtsinverse? $\boxed{\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns der Abbildung φ an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix C und die Dimension des Kerns:

$$\mathcal{B} : \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \mathrm{Rg}(C) = \boxed{2} \qquad \dim \mathrm{Kern}(\varphi) = \boxed{2}$$

1 2 3 4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

0 1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

ja nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \blacksquare 4$

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$AB = \boxed{\text{nicht definiert}} \quad B^\top B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}} \quad AB^\top = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \square 4 \; \blacksquare 5$

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V\colon v_1, v_2, v_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$$v_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}, \quad v_3 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \blacksquare 4$

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Matrix $A_{\alpha\beta}$ und den Vektor u:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & \alpha & -6 \\ 6 & \beta & 2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von α und β so, dass $A_{\alpha\beta}$ orthogonal ist:

$$\alpha = \boxed{2}, \quad \beta = \boxed{-3}.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für α und β, bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta}u | A_{\alpha\beta}u \rangle = \boxed{138}, A_{\alpha\beta}^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \square 4 \; \square 5 \; \blacksquare 6$

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{1 - \sqrt{10}}, \quad \lambda_2 = \boxed{1 + \sqrt{10}}, \quad \lambda_3 = \boxed{7}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix B sind gegeben durch $\lambda_1 = 1 - \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + \sqrt{5}$. Bestimmen Sie eine Basis $V: v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$$v_{\lambda_1} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_2} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_3} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon v \mapsto \boxed{-\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ■7

Betrachten Sie die Matrizen A_α, B_β und die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Cv$ gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ \alpha & 5 & 5 \\ 7 & \alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}, \qquad B_\beta = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & \beta \\ 15 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$: $\det(A_\alpha) = \boxed{-2(\alpha^2 - 6\alpha + 5)}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht regulär? $\boxed{\alpha \in \{1, 5\}}$

(c) Für welche Werte von β hat B_β eine Linksinverse? $\boxed{\beta \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-1\}}$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Kerns der Abbildung φ an. Bestimmen Sie den Rang der Matrix C und die Dimension des Kerns:

$$\mathcal{B}\colon \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad \operatorname{Rg}(C) = \boxed{2} \qquad \dim \operatorname{Kern}(\varphi) = \boxed{2}$$

Scheinklausur | **Höhere Mathematik 1** | **01. 02. 2025**

☐1 ☐2 ☐3 ■4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (Freiwillige Angabe, keine Punkte)

Ich habe die Online-Lernplattform digital.mathematik.uni-stuttgart.de zur Vorbereitung auf die Scheinklausur benutzt.

■ ja ■ nein

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$AB^\top = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 21 \end{pmatrix}} \qquad B^\top B = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & 5 \\ -10 & 5 & 25 \end{pmatrix}} \qquad BB = \boxed{\text{nicht definiert}}$$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ■5

Gegeben sei die Basis $B\colon b_1, b_2, b_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V\colon v_1, v_2, v_3$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{L}(b_1) = \mathrm{L}(v_1)$ und $\mathrm{L}(b_1, b_2) = \mathrm{L}(v_1, v_2)$:

$$v_1 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad v_2 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \qquad v_3 = \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Matrix $A_{\alpha\beta}$ und den Vektor u:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & \alpha \\ 3 & -2 & \beta \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Werte von α und β so, dass $A_{\alpha\beta}$ orthogonal ist:

$$\alpha = \boxed{-3}, \quad \beta = \boxed{-6}.$$

(b) Mit den Werten in Teil (a) für α und β, bestimmen Sie:

$$\langle A_{\alpha\beta} u | A_{\alpha\beta} u \rangle = \boxed{110}, A_{\alpha\beta}^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$$\lambda_1 = \boxed{1-\sqrt{6}}, \quad \lambda_2 = \boxed{1+\sqrt{6}}, \quad \lambda_3 = \boxed{11}.$$

(b) Die Eigenwerte der Matrix B sind gegeben durch $\lambda_1 = 1 - \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + \sqrt{10}$. Bestimmen Sie eine Basis $V : v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$$v_{\lambda_1} = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_2} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_3} = \boxed{\begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$