

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{k+1}} =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} =$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3} - 2\sqrt{x^2 + 2x} \right) = \boxed{}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{6x^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: (-\frac{1}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(2x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

$$f'(x) = \boxed{}, \quad f''(x) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$ an.

$$T_2(f, x, \frac{1}{2}) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 6x_1 - 9x_2 + 10 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1^2 + 3x_2^2 - 20.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ beschreiben.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

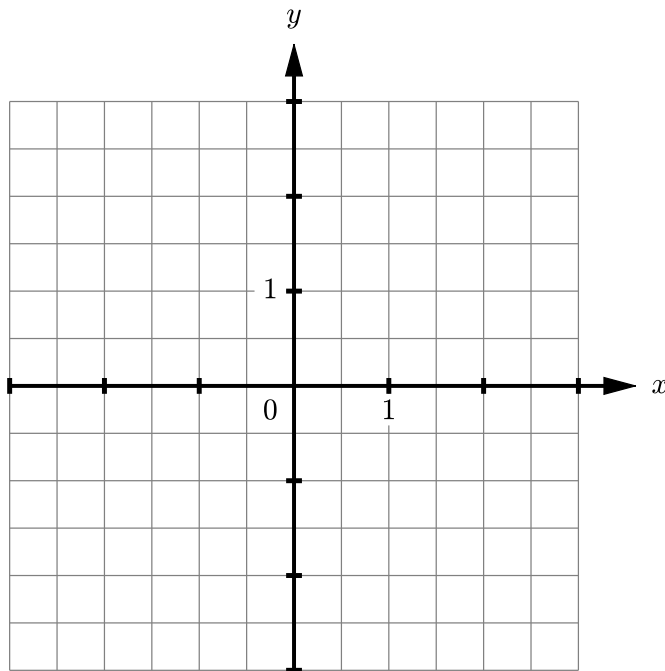
$$\text{Bei } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Maximum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

$$\text{Bei } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Minimum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 + y^2 - 4)(y + \frac{1}{2}) = y^3 + x^2y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4y - 2.$$

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$.



- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

- (c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ

Aufgabe 7 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^2 3^n} (z + 2 - 3i)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}i} \right)^n (4z - 6)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 19^x dx =$, (b) $\int_{-\infty}^0 (5x - 8)e^x dx =$

(c) $\int \frac{e^{4\sqrt{x}}}{7\sqrt{x}} dx =$, (d) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 16} dx =$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\int_E g(x) \cdot dx =$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0, 0)^\top$ in Richtung der Vektoren $u = (0, -1)^\top$ und $v = (1, 0)^\top$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = 7$ bzw. $\partial_v h(P) = 13$.

Bestimmen Sie: $\text{grad } h(P) =$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$ und

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{5y}, \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{,} \quad \frac{\partial g}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{}.$$

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{k!} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} =$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3} - 2\sqrt{x^2 + 3x} \right) = \boxed{}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{6x^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: (-\frac{1}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(3x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

$$f'(x) = \boxed{}, \quad f''(x) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{3}$ an.

$$T_2(f, x, \frac{1}{3}) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 6x_1 - 9x_2 + 10 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1^2 + 3x_2^2 - 45.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ beschreiben.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

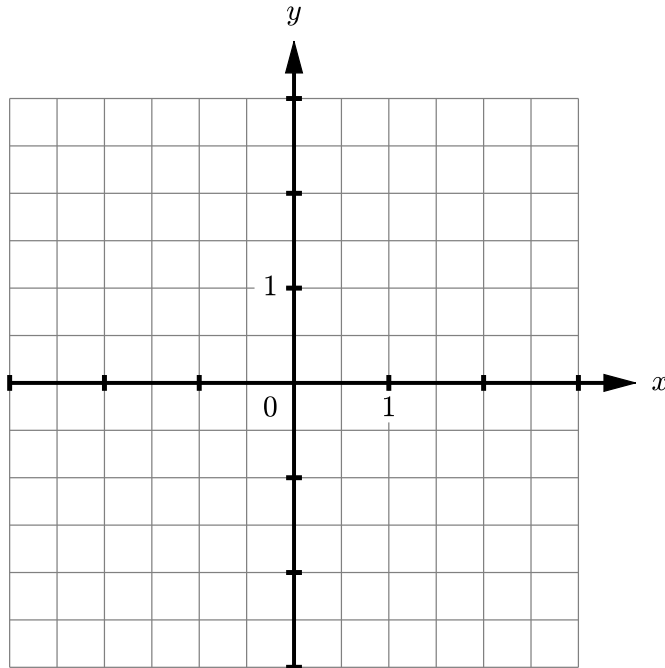
$$\text{Bei } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Maximum mit Wert } f\left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

$$\text{Bei } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Minimum mit Wert } f\left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \end{smallmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 + y^2 - 4)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^3 + xy^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4x - 2.$$

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$.



- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

- (c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ

Aufgabe 7 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{n^2 2^n} (z + 3 - 4i)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}i - 1}\right)^n (9z - 3)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 17^x dx =$, (b) $\int_{-\infty}^0 (7x - 4)e^x dx =$

(c) $\int \frac{e^{6\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx =$, (d) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 10x + 25} dx =$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 3 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\int_E g(x) \cdot dx =$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0, 0)^\top$ in Richtung der Vektoren $u = (-1, 0)^\top$ und $v = (0, 1)^\top$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = -11$ bzw. $\partial_v h(P) = -8$.

Bestimmen Sie: $\text{grad } h(P) =$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 7$ und

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = yf\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + e^{2x}, \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\frac{\partial g}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$, $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$.

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Studien-
gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!} =$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3} - 2\sqrt{x^2 + 4x} \right) = \boxed{}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x) - 1}{10x^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: (-\frac{1}{7}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(7x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

$$f'(x) = \boxed{}, \quad f''(x) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{7}$ an.

$$T_2(f, x, \frac{1}{7}) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -6x_1 + 9x_2 + 20 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1^2 + 3x_2^2 - 20.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ beschreiben.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

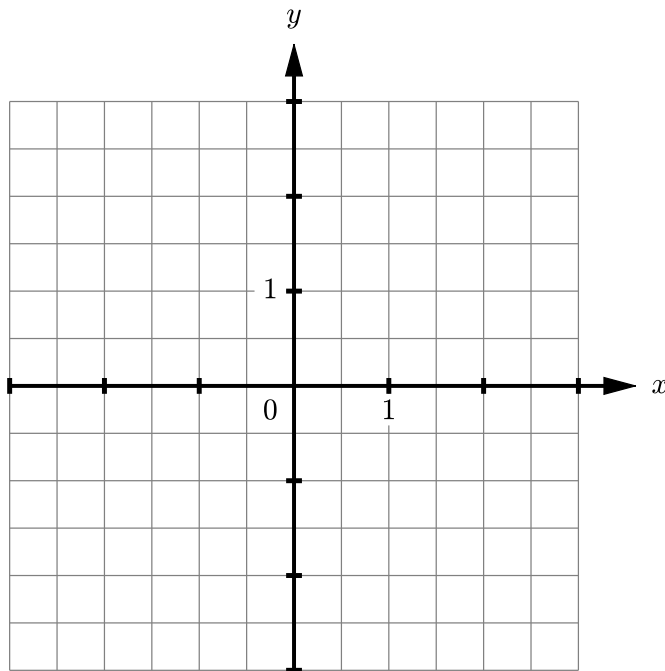
$$\text{Bei } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Maximum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

$$\text{Bei } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Minimum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 + y^2 - 4)(y - \frac{1}{2}) = y^3 + x^2y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4y + 2.$$

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$.



- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

- (c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ

Aufgabe 7 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2 5^n} (z + 4 - i)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3} - i}\right)^n (8z - 2)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 13^x dx =$, (b) $\int_{-\infty}^0 (3x - 9)e^x dx =$

(c) $\int \frac{e^{4\sqrt{x}}}{9\sqrt{x}} dx =$, (d) $\int_{11}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 12x + 36} dx =$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\int_E g(x) \cdot dx =$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(a) Eine Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0, 0)^\top$ in Richtung der Vektoren $u = (0, 1)^\top$ und $v = (-1, 0)^\top$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = 9$ bzw. $\partial_v h(P) = 10$.

Bestimmen Sie: $\text{grad } h(P) =$

(b) Es seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$ und

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{3y}, \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\frac{\partial g}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$, $\frac{\partial g}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$.

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+)$$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin:

Übungsgruppe:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{k!} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} =$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3} - 2\sqrt{x^2 + 5x} \right) = \boxed{}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{12x^2} = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: (-\frac{1}{5}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(5x + 1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

$$f'(x) = \boxed{}, \quad f''(x) = \boxed{}$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{5}$ an.

$$T_2(f, x, \frac{1}{5}) = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto -6x_1 + 9x_2 + 20 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1^2 + 3x_2^2 - 45.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$ beschreiben.

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

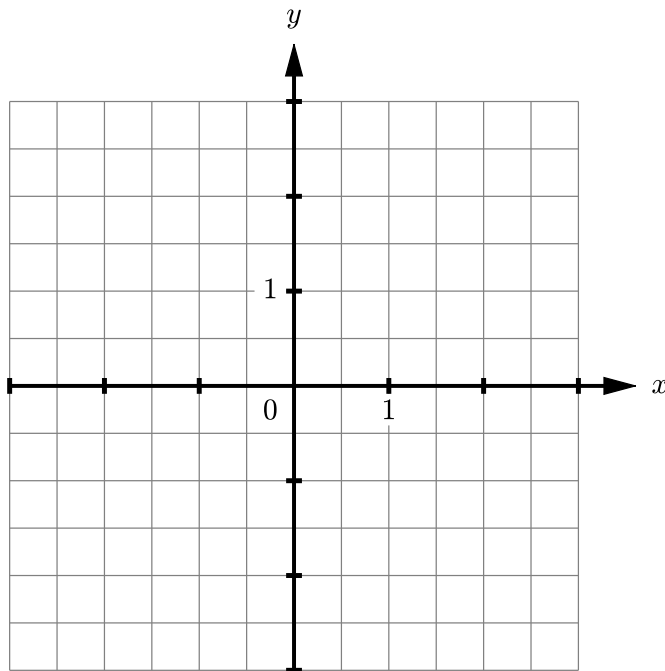
$$\text{Bei } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Maximum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

$$\text{Bei } \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \boxed{} \text{ liegt ein Minimum mit Wert } f\left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{} \text{ vor.}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 + y^2 - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 + xy^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4x + 2.$$

- (a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$.



- (b) Berechnen Sie den Gradienten von f .

$$\text{grad } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

- (c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ

Aufgabe 7 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 7^n} (z + 1 - 2i)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{i + \sqrt{3}}\right)^n (6z - 3)^n$: $z_0 =$, $\rho =$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^1 11^x dx =$, (b) $\int_{-\infty}^0 (6x - 8)e^x dx =$

(c) $\int \frac{e^{8\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}} dx =$, (d) $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 9} dx =$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C: [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\int_E g(x) \cdot dx =$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(a) Eine Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0, 0)^\top$ in Richtung der Vektoren $u = (1, 0)^\top$ und $v = (0, -1)^\top$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = -12$ bzw. $\partial_v h(P) = 6$.

Bestimmen Sie: $\text{grad } h(P) =$

(b) Es seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 4$ und

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = yf\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + e^{3x}, \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\frac{\partial g}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$, $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$.