Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Übungsgruppe:** ______

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{k+1}} = \boxed{-\frac{1}{4}}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \boxed{\mathrm{e}^2 - 1}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{x^2+2x}\right) = \boxed{-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{6x^2} = \boxed{-\frac{3}{4}}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\frac{1}{2},+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \ln(2x+1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{2}{2x+1}}$, $f''(x) = \boxed{-\dfrac{4}{(2x+1)^2}}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0=\frac{1}{2}$ an.

$T_2(f,x,\frac{1}{2}) = \boxed{\ln(2)+(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 6x_1-9x_2+10 \qquad\text{und}\qquad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 2x_1^2+3x_2^2-20.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x_1}{x_2}=0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} 6+4\lambda x_1 &= 0\\ -9+6\lambda x_2 &= 0\\ 2x_1^2+3x_2^2-20 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\binom{x_1}{x_2}=0\right\}$.

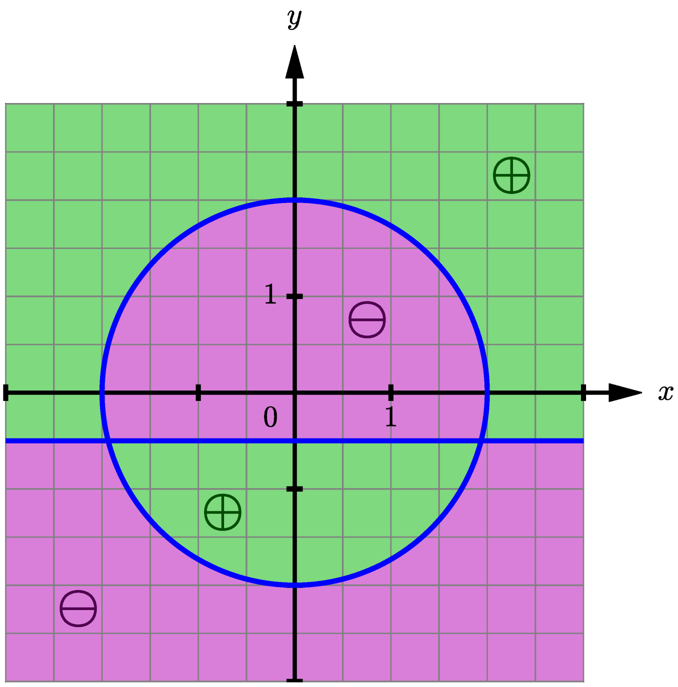
Bei $\binom{p_1}{p_2} = \boxed{\binom{2}{-2}}$ liegt ein Maximum mit Wert $f\binom{p_1}{p_2} = \boxed{40}$ vor.

Bei $\binom{q_1}{q_2} = \boxed{\binom{-2}{2}}$ liegt ein Minimum mit Wert $f\binom{q_1}{q_2} = \boxed{-20}$ vor.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto (x^2+y^2-4)(y+\tfrac{1}{2}) \;=\; y^3+x^2y+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2-4y-2.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3, -3 \leqq y \leqq 3$.



Nullstellenmenge

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \boxed{\begin{pmatrix} 2xy+x \\ x^2+3y^2+y-4 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie alle Stellen $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\binom{x}{y}$	Typ
$\binom{0}{1}$	lokales Minimum
$\binom{0}{-\frac{4}{3}}$	lokales Maximum

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^2\,3^n}\left(z + 2 - 3\,\mathrm{i}\right)^n$: $z_0 = \boxed{-2 + 3\,\mathrm{i}}$, $\rho = \boxed{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^n \left(4z - 6\right)^n$: $z_0 = \boxed{\frac{3}{2}}$, $\rho = \boxed{\frac{1}{4}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 19^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{18}{\ln(19)}}$, **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} (5x - 8)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{-13}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4\sqrt{x}}}{7\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\tfrac{1}{14}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{x}}\right]}$, **(d)** $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 16} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}}$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\displaystyle\int_E g(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-6\pi}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0,0)^\intercal$ in Richtung der Vektoren $u = (0,-1)^\intercal$ und $v = (1,0)^\intercal$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = 7$ bzw. $\partial_v h(P) = 13$.

Bestimmen Sie: grad $h(P) = \boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \end{pmatrix}}$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\binom{0}{1} = 5$ und

$$g\binom{x}{y} = x f\binom{x}{y} + \mathrm{e}^{5y}, \qquad \text{für alle } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\dfrac{\partial g}{\partial x}\binom{0}{1} = \boxed{5}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\binom{0}{1} = \boxed{5\mathrm{e}^5}$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: | **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{k!} = \boxed{-\frac{5}{\mathrm{e}^5}}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent“ ein.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{x^2+3x}\right) = \boxed{-3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{6x^2} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon(-\frac{1}{3},+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\ln(3x+1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{3}{3x+1}}$, $\quad f''(x) = \boxed{-\dfrac{9}{(3x+1)^2}}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0=\frac{1}{3}$ an.

$T_2(f,x,\frac{1}{3}) = \boxed{\ln(2)+\frac{3}{2}\,(x-\frac{1}{3})-\frac{9}{8}\,(x-\frac{1}{3})^2}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 6x_1-9x_2+10 \qquad\text{und}\qquad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 2x_1^2+3x_2^2-45.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x_1}{x_2}=0$ beschreiben.

$$\begin{aligned} 6+4\lambda\,x_1 &= 0\\ -9+6\lambda\,x_2 &= 0\\ 2x_1^2+3x_2^2-45 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\binom{x_1}{x_2}=0\right\}$.

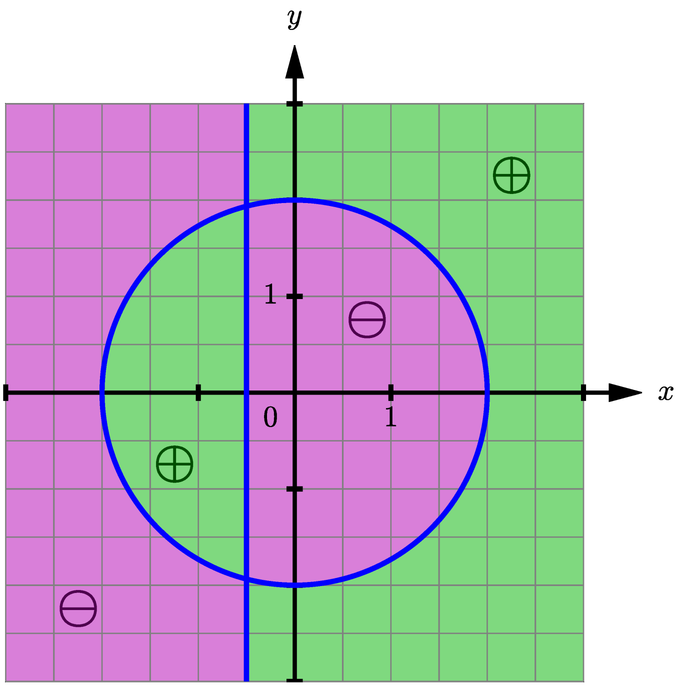
Bei $\binom{p_1}{p_2} = \boxed{\binom{3}{-3}}$ liegt ein Maximum mit Wert $f\binom{p_1}{p_2} = \boxed{55}$ vor.

Bei $\binom{q_1}{q_2} = \boxed{\binom{-3}{3}}$ liegt ein Minimum mit Wert $f\binom{q_1}{q_2} = \boxed{-35}$ vor.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2-4)(x+\tfrac{1}{2}) \;=\; x^3+xy^2+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}y^2-4x-2.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3, -3 \leqq y \leqq 3$.



Nullstellenmenge

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3x^2+y^2+x-4 \\ 2xy+y \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	lokales Minimum
$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$	lokales Maximum

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7}{n^2\,2^n}\big(z + 3 - 4\,\mathrm{i}\big)^n$: $z_0 = \boxed{-3 + 4\,\mathrm{i}}$, $\rho = \boxed{2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 1}\right)^n \big(9z - 3\big)^n$: $z_0 = \boxed{\frac{1}{3}}$, $\rho = \boxed{\frac{1}{9}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 17^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{16}{\ln(17)}}$, **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (7x - 4)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{-11}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{6\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\frac{1}{15}\,\mathrm{e}^{6\sqrt{x}}\right]}$, **(d)** $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 10x + 25} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}}$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\displaystyle\int_E g(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{6\pi}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0,0)^\intercal$ in Richtung der Vektoren $u = (-1, 0)^\intercal$ und $v = (0,1)^\intercal$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = -11$ bzw. $\partial_v h(P) = -8$.

Bestimmen Sie: $\operatorname{grad} h(P) = \boxed{\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}}$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 7$ und

$$g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = y f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{für alle } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \boxed{2\mathrm{e}^2}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \boxed{7}$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: **Übungsgruppe:**

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} = \boxed{-\frac{1}{3}}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!} = \boxed{e^4 - 1}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{x^2+4x}\right) = \boxed{-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(5x)-1}{10x^2} = \boxed{-\dfrac{5}{4}}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon(-\frac{1}{7},+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\ln(7x+1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{7}{7x+1}}$, $f''(x) = \boxed{-\dfrac{49}{(7x+1)^2}}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0=\frac{1}{7}$ an.

$T_2(f,x,\frac{1}{7}) = \boxed{\ln(2)+\frac{7}{2}(x-\frac{1}{7})-\frac{49}{8}(x-\frac{1}{7})^2}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto -6x_1+9x_2+20 \qquad\text{und}\qquad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 2x_1^2+3x_2^2-20.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x_1}{x_2}=0$ beschreiben.

$$\begin{aligned}-6+4\lambda x_1 &= 0\\ 9+6\lambda x_2 &= 0\\ 2x_1^2+3x_2^2-20 &= 0\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\binom{x_1}{x_2}=0\right\}$.

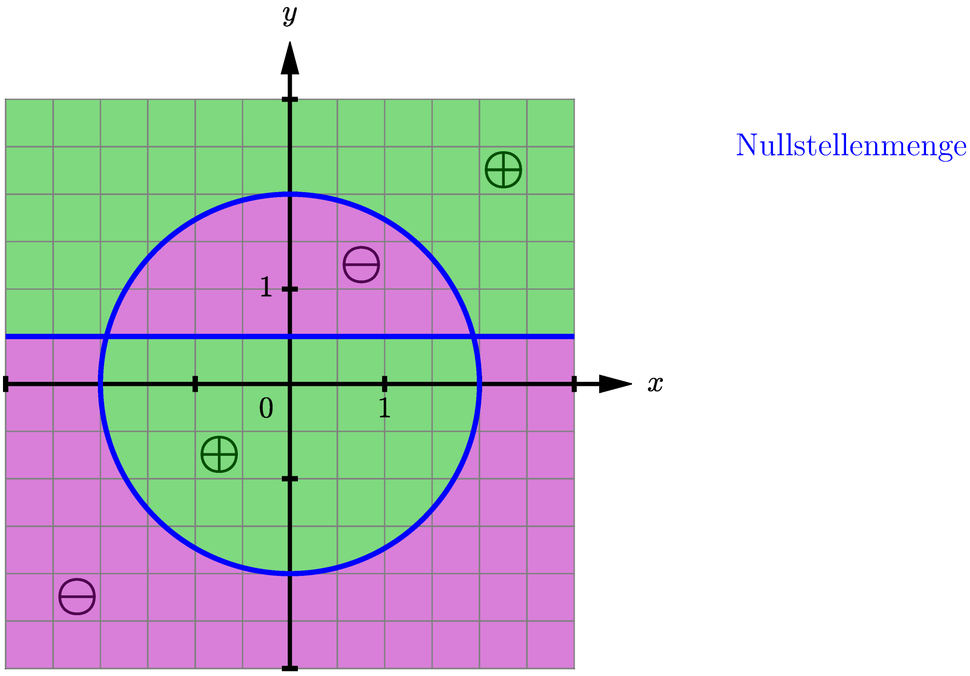
Bei $\binom{p_1}{p_2} = \boxed{\binom{-2}{2}}$ liegt ein Maximum mit Wert $f\binom{p_1}{p_2} = \boxed{50}$ vor.

Bei $\binom{q_1}{q_2} = \boxed{\binom{2}{-2}}$ liegt ein Minimum mit Wert $f\binom{q_1}{q_2} = \boxed{-10}$ vor.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2-4)(y-\tfrac{1}{2}) \;=\; y^3 + x^2y - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - 4y + 2.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3, -3 \leqq y \leqq 3$.



(b) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2xy - x \\ x^2 + 3y^2 - y - 4 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie alle Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	Typ
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	lokales Maximum
$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$	lokales Minimum

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2\,5^n}\left(z+4-\mathrm{i}\right)^n$: $z_0 = \boxed{-4+\mathrm{i}}$, $\rho = \boxed{5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^n \left(8z-2\right)^n$: $z_0 = \boxed{\frac{1}{4}}$, $\rho = \boxed{\frac{1}{8}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 13^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{12}{\ln(13)}}$, **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (3x-9)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{-12}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4\sqrt{x}}}{9\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\tfrac{1}{18}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{x}}\right]}$, **(d)** $\displaystyle\int_{11}^{+\infty} \frac{1}{x^2-12x+36} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{5}}$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\displaystyle\int_E g(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{-4\pi}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0,0)^\intercal$ in Richtung der Vektoren $u = (0,1)^\intercal$ und $v = (-1,0)^\intercal$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = 9$ bzw. $\partial_v h(P) = 10$.

Bestimmen Sie: $\operatorname{grad} h(P) = \boxed{\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}}$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\binom{0}{1} = 6$ und

$$g\binom{x}{y} = x f\binom{x}{y} + \mathrm{e}^{3y}, \qquad \text{für alle } \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\dfrac{\partial g}{\partial x}\binom{0}{1} = \boxed{6}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\binom{0}{1} = \boxed{3\mathrm{e}^3}$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/1	/2	/2	/3	/5	/6	/4	/5	/3	/31

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten hilfreich sein:

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+)$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

Name des Tutors/der Tutorin: $\boxed{}$ **Übungsgruppe:** $\boxed{}$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{k!} = \boxed{-\frac{3}{\mathrm{e}^3}}\ , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls ein Grenzwert nicht existiert, tragen Sie „divergent" ein.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{x^2+5x}\right) = \boxed{-5}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{12x^2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon(-\frac{1}{5},+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto\ln(5x+1)$.

(a) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f.

$f'(x) = \boxed{\dfrac{5}{5x+1}}$, $f''(x) = \boxed{-\dfrac{25}{(5x+1)^2}}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt $x_0=\frac{1}{5}$ an.

$T_2(f,x,\frac{1}{5}) = \boxed{\ln(2)+\frac{5}{2}\,(x-\frac{1}{5})-\frac{25}{8}\,(x-\frac{1}{5})^2}$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto -6x_1+9x_2+20 \qquad\text{und}\qquad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto 2x_1^2+3x_2^2-45.$$

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, die die Bedingungen von Lagrange für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x_1}{x_2}=0$ beschreiben.

$$\begin{aligned}-6+4\lambda\,x_1 &= 0\\ 9+6\lambda\,x_2 &= 0\\ 2x_1^2+3x_2^2-45 &= 0\end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Extrema der Einschränkung $f|_E$ von f auf $E=\left\{x\in\mathbb{R}^2\;\middle|\; g\binom{x_1}{x_2}=0\right\}$.

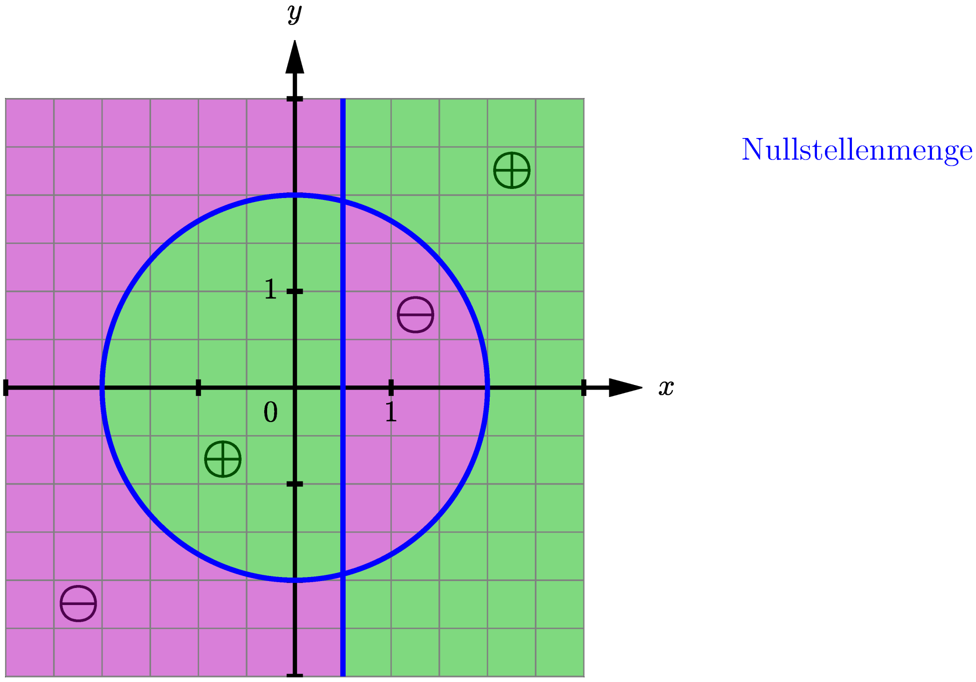
Bei $\binom{p_1}{p_2} = \boxed{\binom{-3}{3}}$ liegt ein Maximum mit Wert $f\binom{p_1}{p_2} = \boxed{65}$ vor.

Bei $\binom{q_1}{q_2} = \boxed{\binom{3}{-3}}$ liegt ein Minimum mit Wert $f\binom{q_1}{q_2} = \boxed{-25}$ vor.

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto (x^2+y^2-4)(x-\tfrac{1}{2}) \;=\; x^3+xy^2-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y^2-4x+2.$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge und die Vorzeichenverteilung von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3, -3 \leqq y \leqq 3$.



(b) Berechnen Sie den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad} f\binom{x}{y} = \boxed{\begin{pmatrix} 3x^2+y^2-x-4 \\ 2xy-y \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie alle Stellen $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, an denen f ein lokales Extremum besitzt.

Geben Sie jeweils den Typ des Extremums (lokales Maximum oder lokales Minimum) an.

Hinweis: Sattelpunkte müssen nicht bestimmt werden.

$\binom{x}{y}$	Typ
$\binom{-1}{0}$	lokales Maximum
$\binom{\frac{4}{3}}{0}$	lokales Minimum

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und den Konvergenzradius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2\, 7^n} \big(z + 1 - 2\,\mathrm{i}\big)^n$: $z_0 = \boxed{-1 + 2\,\mathrm{i}}$, $\rho = \boxed{7}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\mathrm{i} + \sqrt{3}}\right)^n \big(6z - 3\big)^n$: $z_0 = \boxed{\frac{1}{2}}$, $\rho = \boxed{\frac{1}{6}}$

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 11^x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{10}{\ln(11)}}$, **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (6x - 8)\,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \boxed{-14}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{8\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \boxed{\left[\tfrac{1}{12}\,\mathrm{e}^{8\sqrt{x}}\right]}$, **(d)** $\displaystyle\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 9} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{4}}$

(e) Gegeben seien die Ellipse E mit der Parametrisierung $C\colon [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

und das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie: $\displaystyle\int_E g(x) \bullet \mathrm{d}x = \boxed{4\pi}$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Eine Funktion $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ besitze im Ursprung $P = (0,0)^\intercal$ in Richtung der Vektoren $u = (1,0)^\intercal$ und $v = (0,-1)^\intercal$ die Richtungsableitungen $\partial_u h(P) = -12$ bzw. $\partial_v h(P) = 6$.

Bestimmen Sie: $\operatorname{grad} h(P) = \boxed{\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}}$

(b) Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ zwei Funktionen mit $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$ und

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{3x}, \qquad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$\dfrac{\partial g}{\partial x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{3\mathrm{e}^3}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{4}$.
