Aufgabe 6 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Berechnen Sie:

$$\frac{4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2} = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 2\mathrm{i} - 2$ und stellen Sie diese in Polarkoordinaten dar:

Aufgabe 7 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

Sei $\mathbb{E} = (0; \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{} \cdot v + \boxed{}.$$

Nachklausur zur 2. Scheinklausur **Höhere Mathematik 1** **07. 02. 2025**

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:** ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 Punkt) ☐0 ☐1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Matrikelnummer:

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Aufgabe 2 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$BB^\top =$ ☐ $A^\top A =$ ☐ $B^\top A^\top =$ ☐.

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{L} =$ ☐

Aufgabe 3 (4 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(a) Seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(B) = \sqrt{3}$ und $A^2 = 3B^2$. Berechnen Sie

$\det(3B) =$ ☐, $\det(A) =$ ☐.

(b) Seien $C,\, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(C) = -\frac{9}{5}$, $\det(D) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie

$\det(D^\top C) =$ ☐, $\det(C^{-1}DCDC^{-1}) =$ ☐.

Aufgabe 4 (8 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

$\lambda_1 =$ ☐, $\lambda_2 =$ ☐, $\lambda_3 =$ ☐.

(b) Wenn die Eigenwerte der Matrix B gegeben sind durch $\lambda_1 = 1-\sqrt{17}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1+\sqrt{17}$, bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V : \{v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}\}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B:

$v_{\lambda_1} =$ ☐, $v_{\lambda_2} =$ ☐, $v_{\lambda_3} =$ ☐.

Aufgabe 5 (5 Punkte) ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(a) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k!} = \boxed{}$$

(b) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = (-1)^n \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}.$$

Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe oder schreiben Sie „divergiert“, falls die Reihe divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{}$$

(c) Es sei nun die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $b_n = \left(\frac{9}{8}\right)^n a_n$. Bestimmen Sie den Limes superior von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n =$ ☐