## Aufgabe 6 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

**(a)** Berechnen Sie:

$$\frac{4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2} = \boxed{2}$$

**(b)** Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 2\mathrm{i} - 2$ und stellen Sie diese in Polarkoordinaten dar:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right), \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{11\pi}{12}\right)\right), \\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{19\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{19\pi}{12}\right)\right) \end{aligned}$$

---

## Aufgabe 7 (4 Punkte)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ■4

Sei $\mathbb{E} = (0; e_1, e_2)$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$, und $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}10\\30\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)$.

**(a)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}$:

$${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}}.$$

**(b)** Bestimmen Sie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

$${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto \boxed{\tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot v + \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}}.$$

---

+1/1/60+

**Nachklausur zur 2. Scheinklausur** | **Höhere Mathematik 1** | **07. 02. 2025**

■1 ☐2 ☐3 ☐4

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Die grau hinterlegten Kästchen dienen der Korrekturauswertung und sind freizulassen.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

*Viel Erfolg!*

---

## Aufgabe 1 (1 Punkt)

☐0 ■1

Kodieren Sie in den Feldern Ihre Matrikelnummer, indem Sie die entsprechenden Kästen aus**füllen**. Tragen Sie außerdem Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in die unten stehenden Felder ein.

**Name, Vorname:**

**Matrikelnummer:**

**Matrikelnummer:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 | ☐0 |
| ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 | ☐1 |
| ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 | ☐2 |
| ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 | ☐3 |
| ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 | ☐4 |
| ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 | ☐5 |
| ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 | ☐6 |
| ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 | ☐7 |
| ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 | ☐8 |
| ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 | ☐9 |

**Aufgabe 2** (5 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \square 4 \; \blacksquare 5$

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Matrizenoperationen. Tragen Sie „nicht definiert“ in den Kasten ein, falls die Operation nicht möglich ist.

$$BB^\top = \boxed{\begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}} \quad A^\top A = \boxed{\begin{pmatrix} 26 & 31 & 1 \\ 31 & 37 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad B^\top A^\top = \boxed{\text{nicht definiert}}.$$

**(b)** Berechnen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des folgenden Gleichungssystems: $Ax = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\mathcal{L} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -20 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \blacksquare 4$

**(a)** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(B) = \sqrt{3}$ und $A^2 = 3B^2$. Berechnen Sie

$$\det(3B) = \boxed{27\sqrt{3}}, \qquad \det(A) = \boxed{9}.$$

**(b)** Seien $C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(C) = -\frac{9}{5}$, $\det(D) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie

$$\det(D^\intercal C) = \boxed{-\frac{27}{25}}, \qquad \det(C^{-1}DCDC^{-1}) = \boxed{-\frac{1}{5}}.$$

**Aufgabe 4** (8 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \square 4 \; \square 5 \; \square 6 \; \square 7 \; \blacksquare 8$

Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $A$.

$$\lambda_1 = \boxed{-3}, \quad \lambda_2 = \boxed{3 - \mathrm{i}}, \quad \lambda_3 = \boxed{3 + \mathrm{i}}.$$

**(b)** Wenn die Eigenwerte der Matrix $B$ gegeben sind durch $\lambda_1 = 1 - \sqrt{17}$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 1 + \sqrt{17}$, bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $V : \{v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, v_{\lambda_3}\}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $B$:

$$v_{\lambda_1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -1 \\ +\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_{\lambda_3} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}}.$$

**Aufgabe 5** (5 Punkte) $\square 0 \; \square 1 \; \square 2 \; \square 3 \; \square 4 \; \blacksquare 5$

**(a)** Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k!} = \boxed{\mathrm{e} + 1}$$

**(b)** Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = (-1)^n \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}.$$

Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe oder schreiben Sie „divergiert“, falls die Reihe divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{-\frac{48}{17}}$$

**(c)** Es sei nun die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $b_n = \left(\frac{9}{8}\right)^n a_n$. Bestimmen Sie den Limes superior von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n = \boxed{6}$