A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

1. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

(a) Berechnen Sie $\frac{3}{5/2} \cdot \frac{25}{6}$, $101^3 - 100^3$, $(\sqrt{2})^{(2^4)}$, $(\sqrt{2}^2)^4$ und $\sqrt{\frac{1}{5}((\sqrt{21})^4 + 63^2)}$.

(b) Berechnen Sie $\binom{25}{3}$ und $\binom{9}{5} + \binom{9}{4}$.

(c) Multiplizieren Sie die Klammern aus und vereinfachen Sie:

$$\frac{(x+3)^2 - (x+1)(x+4)}{x+5} \qquad \frac{\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + 1}{4\alpha^3 + 6\alpha^2 + 1 + \alpha^4 + 4\alpha}$$

Aufgabe P 2. *Summen*

(a) Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Gleichheit der folgenden Ausdrücke für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}, \qquad \sum_{j=0}^{2n} \frac{a_{2n-(j-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{a_k}{2}, \qquad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n+1} (\cos((k+1)\pi) + 1) a_k.$$

(b) Seien $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq s$ gilt:

$$\sum_{k=s}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_s.$$

Aufgabe P 3. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass:

(a) $\sum_{k=0}^{n} (5k - 3) = \frac{1}{2}(5n^2 - n - 6)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) $\sum_{k=2}^{n} 4k(k^2 - 1) = \frac{(n+2)!}{(n-2)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ gilt.

Aufgabe P 4. *Pascalsches Dreieck*

Betrachten Sie die Gleichung

$$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+2}\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+2}{k+2}.$$

Finden Sie die Faktoren für $n = 2$, $k = 0$ im Pascalschen Dreieck.
Zeigen Sie, dass die Formel allgemein gültig ist.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 26.10. – 01.11.)
auf folgender Webseite (dieser Link wechselt jede Woche!)

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimal**punkt** einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (<st∗∗∗∗∗∗ @stud.uni-stuttgart.de>) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs, nach der Abgabe der schriftlichen Übungen in den Übungsgruppen, um 24:00 Uhr.
Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Seien $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2$ und $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq -b$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\dfrac{\frac{3}{2(3^2-3)} + \frac{1}{6}}{\frac{6+2}{3^2} + 1 - \frac{2^2}{3^2-1}}$

(b) $\dfrac{\binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + 0!}$

(c) $\dfrac{a^4 + 2b(b(b(b+2a) + 3a^2) + 2a^3) - b^4}{a(a^2 + b(3a+1)) - b(a(1-3b) - b^2)}$

(d) $\sqrt{28^2(n-1) + (\sqrt{14})^4(n-2)^2}$

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\sum_{n=-4}^{4} 35 \cdot 6^{2n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k}$.

Berechnen Sie (b) für $n = 143$.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{i=1}^{n} A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\displaystyle\prod_{j=2}^{m} \frac{j-1}{j^3 - 2j^2 + j} = \frac{m}{(m!)^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqq 2$.

(b) $\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{2}{n(n-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Ungleichungen*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\dfrac{n!}{4} > \dfrac{2^n}{(n+2)(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

(b) $a^n - 2^n \geqq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} 2^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geqq 3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(\frac{3x}{2})$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}\cos(3x)$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}\cos(3x)\cos(\frac{3x}{2})$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.