A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

3. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \geqq 25\right\}, \\ M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| \leqq \tfrac{4}{5}x\right\}, \\ M(a,b) &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-a)^2+(y-b)^2 \leqq \left(\tfrac{9}{4}\right)\right\} \text{ für } a=1 \text{ und } b=2. \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$ und $\big(M_1 \cup M(-1,-4)\big) \cup \big(M_2 \smallsetminus M_1\big)$.

Aufgabe P 6. *Abbildungen*

(a) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe. Weiterhin sei $f\colon A \to \mathbb{N}$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer sein Alter (auf Jahre gerundet) zuordnet. Kann f injektiv sein? Kann f surjektiv sein? Kann f bijektiv sein?

(b) Es seien A die Menge der (anwesenden) Teilnehmer Ihrer Übungsgruppe und B die Menge $\{\text{Januar}, \text{Februar}, \ldots, \text{Dezember}\}$. Weiterhin sei $g\colon A \to B$ die Abbildung, die jedem Teilnehmer seinen Geburtsmonat zuordnet. Kann g injektiv sein? Kann g surjektiv sein? Kann g bijektiv sein?

(c) Sei $h\colon (-1,+\infty) \to (0,+\infty)\colon x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Skizzieren Sie den Graphen von h. Ist h injektiv? Ist h surjektiv? Ist h bijektiv?

Aufgabe P 7. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = 2+3\mathrm{i}$ und $z_3 = 4-2\mathrm{i}$. Berechnen Sie:

(a) $-5z_1 + 4z_2 - \dfrac{z_3}{2}$ **(b)** $(2z_1+3z_2)\cdot z_3$ **(c)** $(z_1-z_3)^2 - \bar{z}_2$

Aufgabe P 8. *Komplexe Zahlenebene*

Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = 3-4\mathrm{i} \qquad z_2 = 6+2\mathrm{i} \qquad z_3 = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i} \qquad z_4 = z_1 \cdot z_3.$$

(a) Geben Sie die komplexen Zahlen $\bar{z}_j$ für $j=1,2,3,4$ in der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ an und skizzieren Sie diese.

(b) Berechnen Sie $|z_j|$, $j=1,2,3,4$. Wie kann man diesen Wert interpretieren?

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Strecke von 0 bis z_3 und der von 0 bis 1. Geben Sie diesen Winkel sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß an.

(d) Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene:

$$\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\bar{z} + \mathrm{i}\bar{z} - \mathrm{i}z - 2(1+\operatorname{Im}(z))\operatorname{Re}(\bar{z}) - \mathrm{i}^2 > 1 \ \wedge\ \operatorname{Re}(z) = 3\right\}$$

Hinweis: Vereinfachen Sie zuerst die Ungleichung.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 09.11. – 15.11.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 11. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (-3\cos(5x), 2\sin(x))$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -7x^5 + 3$

(c) $h\colon [1,2] \to [0,51]\colon x \mapsto (x^3-1)^2 + 1$

(d) $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (3x-y, 2x+2y)$

Aufgabe H 12. *Abbildungen II*

(a) Finden Sie eine Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(b) Finden Sie eine Abbildung $f_2 : \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \to \mathbb{Q}$, die injektiv ist. Ist Ihr Beispiel surjektiv?

(c) Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto (x-2)^2 \qquad \text{und} \qquad g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax - 2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Menge der $a \in \mathbb{R}$, die $f(x) > g_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.
Hinweis: Sei $b, c \in \mathbb{R}$. Es gilt $x^2 + bx + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn $b^2 - 4c < 0$ ist.

Aufgabe H 13. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\operatorname{Re}(z+\bar{z}) - \operatorname{Im}(\bar{z}) \geqq 3) \wedge (\operatorname{Re}(z+\bar{z}) - \operatorname{Im}(z-\bar{z}) \geqq 3) \right\}$$
$$B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \tfrac{5}{2}\operatorname{Im}(z^2) - 3\operatorname{Re}(z)^2 = 2\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z^2) \right\}$$
$$C := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (4\operatorname{Re}(z) + 5\operatorname{Im}(z) < 15) \wedge (3\operatorname{Re}(z) - 7\operatorname{Im}(z) > 22) \wedge (7\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Im}(z) < 6) \right\}$$
$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3|\operatorname{Re}(z)| + 4|\operatorname{Im}(z)| \geqq 5 \right\}.$$

Aufgabe H 14. *Komplexe Zahlen*

(a) Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\operatorname{Re}((a+bi)^4) = a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ und $\operatorname{Im}((a+bi)^4) = 4ab(a^2-b^2)$.

(b) Skizzieren Sie $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, z^4 und $(\bar{z})^4$ in der komplexen Zahlenebene. Wie ist das Verhältnis zwischen $(\bar{z})^4$ und z^4?

(c) Berechnen Sie den euklidischen Abstand zwischen z und 0 und zwischen z^4 und 0.

(d) Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den folgenden Strecken $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$:

(i) $A = z,\ B = 1$ **(ii)** $A = z^4,\ B = 1$ **(iii)** $A = z^4,\ B = (\bar{z})^4$

Geben Sie diese Winkel sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß an.

Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

Vereinfachen Sie:

$$\frac{2\alpha^7 - 8\alpha^6 + 17\alpha^5 - 28\alpha^4 + 32\alpha^3 - 20\alpha^2 + 5\alpha}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} - (2\alpha^3 + 5).$$

Wir erwarten nicht nur die Lösung als $a(b+c)$, sondern auch vollständige Berechnungen.