A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

4. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. *Rechnen mit komplexen Zahlen, Polarkoordinaten*

Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Berechnen Sie

(a) $\dfrac{1}{z_1}$

(b) $z_1 z_2$

(c) z_1^3

(d) $\sqrt{z_1}$

(e) $\bar{z}_1 \bar{z}_2$

(f) $\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$

Aufgabe P 10. *Komplexe Wurzeln*

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen und zeichnen Sie diese jeweils in die komplexe Zahlenebene ein:

(a) $w^3 = i$ **(b)** $w^3 = 2 - 2i$ **(c)** $w^4 = -4$ **(d)** $w^6 = 1$

Aufgabe P 11. *Linearfaktorzerlegung von Polynomen*

Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren.

$$\begin{aligned}
p_1(X) &= X^4 - 3X^3 - 33X^2 + 35X \\
p_2(X) &= X^3 + (1-\mathrm{i})X^2 + (2-\mathrm{i})X + 2 \\
p_3(X) &= X^4 + X^2 - 2
\end{aligned}$$

Aufgabe P 12. *Monotonie und Beschränktheit*

Gegeben sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = 3^n, \qquad b_n = \cos(\tfrac{\pi}{6} + 2\pi n), \qquad c_n = (-\tfrac{1}{5})^n, \qquad d_n = \tfrac{1}{n^2-2}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob diese Folgen beschränkt sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere und/oder untere Schranke.

(b) Prüfen Sie, ob diese Folgen (streng) monoton wachsend bzw. fallend sind.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 16.11. – 22.11.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 16. *Polarkoordinaten*

Seien

$$z_1 = -1 - \mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}.$$

Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen und zeichnen Sie diese Zahlen in die komplexen Zahlenebene ein.

(a) z_1

(b) z_2

(c) z_1^3

(d) $z_1 \cdot z_2$

(e) $\dfrac{1}{\bar{z}_2}$

(f) z_2^{40}

Aufgabe H 17. *Polarkoordinaten und komplexe Wurzeln*

Stellen Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen z in Polarkoordinaten dar und bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = z$.

(a) $z = 2\mathrm{i}$,

(b) $z = 1 - \mathrm{i}$,

(c) $z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})$,

(d) $z = \cos(\sqrt{2}\,\pi) + \mathrm{i}\sin(-\sqrt{2}\,\pi)$.

Aufgabe H 18. *Polynomdivision*

Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest, um für die nachfolgenden Polynome $f(X)$ und $g(X)$ jeweils Polynome $p(X)$ und $r(X)$ mit $f(X) = p(X)g(X) + r(X)$ zu bestimmen, wobei $r(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

(a) $f(X) = X^7 - 30X^6 + 4X^5 + 3X^2 - 90X + 12$ und $g(X) = X^5 + 3$;

(b) $f(X) = X^7 - 5$ und $g(X) = X^3 - 2$;

(c) $f(X) = 15X^7 + 10X^6 - 5X^5 + 12X^4 - 3X^3 + 12X^2 - 36X + 23$ und $g(X) = 5X^4 - 6X + 3$;

(d) $f(X) = X^9 - 6X^7 - 5X^6 - 6X^5 - 5X^4 + X^3 - 6X^2 - 56X - 54$ und $g(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 8$.

Aufgabe H 19. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit.
Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

(a) $a_n = \dfrac{n+3}{2n}$

(b) $a_n = n\cos(\pi(n+1))$

(c) $a_n = 1 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

(d) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 20. *Komplexe Zahlenebene*

Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \big((2\operatorname{Re}(z) + 3\operatorname{Im}(z) \leqq 4) \;\wedge\; (2\operatorname{Re}(z) - 3\operatorname{Im}(z) \leqq 4) \;\wedge\; (\operatorname{Re}(z) \geqq -1)\big) \\ \vee\; (\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = 9) \end{array} \right\}$$