A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

5. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Im laufenden Semester wird die Reihenfolge des behandelten Stoffs innerhalb der HM 1 umgestellt. Relevant für die Scheinklausur am 16. Dezember 2023 ist der bis dahin in der Vorlesung, den Gruppenübungen, den Onlineübungen und den Vortragsübungen behandelte Stoff. Insbesondere wird das aktuelle Kapitel 2 (Folgen, Konvergenz, Reihen) Gegenstand dieser Scheinklausur sein. In Scheinklausuren aus Dezemberterminen früherer Jahre kamen diese Themen *nicht* vor.

Präsenzübungen

Aufgabe P 13. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $(42)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left(n(-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(n(-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(d)** $\left(\frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe P 14. *Häufungspunkte I*

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils eine Teilfolge an, welche gegen den Häufungspunkt konvergiert.

(a) $(5\cdot(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **(b)** $\left((-1)^n\frac{13n(n+1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **(c)** $\left(-2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei diese Folge rekursiv definiert ist durch

$$a_1=0, a_2=1, a_{3n}=a_{3n-1}+1, a_{3n+1}=a_{3n}+1, a_{3n+2}=a_{3n+1}-2.$$

Aufgabe P 15. *Häufungspunkte II*

Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte, sowie $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für jede der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $a_n=1+2\cdot(-1)^n$

(c) $a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade}\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade}\end{cases}$

(d) $a_n=\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Aufgabe P 16. *Konvergenz*

Beweisen Sie, dass die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren. Geben Sie dazu jeweils für jedes $\varepsilon>0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n|<\varepsilon$ für alle $n>N(\varepsilon)$ gilt.

(a) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; **(b)** $a_n=\frac{2n}{n^3+1}$.

Geben Sie $N(0.1)$ und $N(0.01)$ jeweils explizit an.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 23.11. – 30.11.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 21. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $\left(n\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi(2n-\frac{4}{3})\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\sqrt{19(n+5)}-\sqrt{19n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n}-8\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{1}{n^4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 22. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{25(n+7)}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(6\sin(\frac{\pi}{2}n)(5n+3)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\operatorname{Im}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe H 23. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-18}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 99\left(\frac{1}{100}\right)^k$

(b) $a_n = \frac{n^3-27}{8n^3}$

Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus der Frischhaltebox!

Aufgabe H 24. *Konvergenz und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie zudem jeweils alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und den Limes inferior der Folgen.

(a) $a_n = \frac{36n^3-9}{24n^2+12\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n\sqrt[n]{\frac{2n}{3^{n^2}}}+\frac{\cos(n)}{n}$

(c) $a_n = \operatorname{Re}\left(2^{-n}\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right)$

(d) $a_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k+(-1)^k}{5^k}$

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Teleskopsummen*

(a) Zeigen Sie, dass $(1-q)\sum_{k=1}^{n} q^k = q - q^{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle $q\in\mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.