A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

6. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 17. *Sandwichsatz*

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\,2^n}$

Aufgabe P 18. *Konvergenz mit Bolzano-Weierstraß*

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden Folgen konvergieren:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$;

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = 8$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 3$.

Aufgabe P 19. *Konvergenz mit Cauchy*

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die folgende Folge konvergiert:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\sin(2)}{2^2} + \ldots + \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

Aufgabe P 20. *Partialsummen und Teleskopreihen*

Berechnen Sie jeweils die n-te Partialsumme S_n der nachstehenden Reihen für $n \in \{2, 3\}$. Untersuchen Sie jeweils außerdem, ob die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k+1)^3 - k^3$ **(b)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+k}$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{k^2+k} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ für geeignete $A, B \in \mathbb{R}$ gilt.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 30.11. – 06.12.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 26. *Teleskopreihen*

(a) Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte:

(i) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$$ **(ii)** $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci Folge mit $f_0 = f_1 = 1$ und $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = 1$ gilt. *Hinweis:* $\frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = \frac{f_k}{f_k}\frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}}$.

Aufgabe H 27. *Geometrische Reihe*

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte, wobei $x > 0$ gilt:

(a) $$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{3}}$$ **(b)** $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{k}$$ **(c)** $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^k + 4)^k}$$

Aufgabe H 28. *Folgen komplexer Zahlen*

Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert z genau dann, wenn sowohl $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ als auch $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$ gilt. Gibt es kein solches $z \in \mathbb{C}$, dann nennt man die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz:

(a) $$a_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$$

(b) $$b_n = \frac{3n^2 + \mathrm{i}}{4\mathrm{i}n^2 + 5}$$

(c) $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{2+\mathrm{i}}\right)^k$$

(d) $$d_n = \max\left\{\operatorname{Re} w \;\middle|\; w^n = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right\}$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.8.1 auch für Folgen komplexer Zahlen gelten.

Aufgabe H 29. *Sandwichsatz*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(a) $$\left(\sqrt[n]{3^n + 4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 - \sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\left(1 - \frac{1}{n^2 - 2n + 5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + 4k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Komplexe Zahlen, Polarkoordinaten*

Ordnen Sie die nachstehenden komplexen Zahlen ihren näherungsweise angegebenen Argumenten und Beträgen zu:

z	$\arg(z)$	$\lvert z\rvert$
$6+4\mathrm{i}$	1.750π	8.25
$-4-5\mathrm{i}$	0.187π	6.40
$3-3\mathrm{i}$	0.578π	4.24
$-2+8\mathrm{i}$	1.285π	7.21