A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

7. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 21. *Exponentialreihe*

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Ausdrücke.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{8}{k!}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{k!j!}\right)$

Aufgabe P 22. *Untervektorräume*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Die Menge $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x+3y-z=0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Die Menge $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x+3y-z\leqq 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Kreislinie $\left\{v\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |v|=1\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(d) Die Menge $\left\{\sum_{j=1}^{2}\alpha_j v_j \,\middle|\, \alpha_j\in\mathbb{R}\right\}$ mit $v_1=(1,2,-1)$ und $v_2=(1,0,-7)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 23. *Skalarprodukt*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und $x,y\in V$.

(a) Berechnen Sie $\langle x+2y\,|\,2x+y\rangle$, falls $\langle x\,|\,x\rangle=1$, $\langle x\,|\,y\rangle=2$ und $\langle y\,|\,y\rangle=3$ gelten.

(b) Berechnen Sie $|x+y|^2$, falls $4\langle x\,|\,y\rangle=1$ und $|x-y|^2=1$ gelten.

(c) Berechnen Sie $\langle x\,|\,y\rangle$, falls $|x+y|^2=4$ und $|x-y|^2=1$ gelten.

Aufgabe P 24. *Untervektorräume*

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von V Untervektorräume sind:

(a) $U_1\cap U_2=\left\{v\in V \,\middle|\, v\in U_1 \text{ und } v\in U_2\right\}$

(b) $U_1+U_2:=\left\{u_1+u_2 \,\middle|\, u_1\in U_1 \text{ und } u_2\in U_2\right\}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 07.12. – 13.12.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 31. *Grenzwert mit Reihe*

(a) Zeigen Sie, dass $(k+2)! \geqq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\, k!} \leqq \frac{2}{m^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\, k!}$.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt und spezielle Vektoren*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren mit $\langle v_i \,|\, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle v_i \,|\, v_i \rangle = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Berechnen Sie $\langle v_1 + v_2 - v_3 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle$ und $|v_1 + v_2 - v_3|^2$ falls $n = 4$.

(b) Berechnen Sie $\langle c \,|\, d \rangle$ und $|c|^2$ für $c = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ und $d = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie, dass $|x-y|^2 = |x|^2 - |y|^2$ gilt für $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, v_k \rangle\, v_k$ und $x \in V$.

Aufgabe H 33. *Untervektorräume*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 3y + 5z = 0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2) \geqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$.

(c) $\left\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto a\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ für $Y \subseteqq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H 34. *Orthogonalprojektion*

Sei U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Eine Abbildung $p \colon V \to V$ heißt Orthogonalprojektion auf U, falls für alle $u \in U$, alle $v, w \in V$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$p(v) \in U, \quad p(sv + tw) = sp(v) + tp(w) \quad \text{und} \quad \langle v - p(v) \,|\, u \rangle = 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist p eine Orthogonalprojektion auf U, so gilt $p(p(w)) = p(w)$ für alle $w \in V$. *Hinweis:* Betrachten Sie $|p(w) - p(p(w))|^2$.

(b) Zeigen Sie: $p_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \colon v \mapsto \frac{\langle v \,|\, x \rangle}{|x|^2} x$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist eine Orthogonalprojektion auf den Untervektorraum $U_x = \left\{ax \;\middle|\; a \in \mathbb{R}\right\}$ von $\mathbb{R}^n$.

(c) Skizzieren Sie U_x, w, $p_x(w)$ und $\left\{(1-t)w + tp_x(w) \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$ für $x = (4,2)$ und $w = (1,3)$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Teilbarkeit und Induktion*

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ohne Rest durch 9 teilbar; das heißt es gibt ein $k_n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$.