A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

8. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 25. *Geraden und Ebenen*

Gegeben sind die Punkte $P = (0, 2, 5)$, $Q = (3, 5, 6)$ und $R = (-1, 0, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch P und Q geht.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die durch P, Q und R geht.

Aufgabe P 26. *Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem und Basen*

Gegeben seien $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 3, 0)$, $v_3 = (1, 4, -1)$, $v_4 = (0, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$.
Entscheiden Sie:

(a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(b) Sind v_1, $-v_1$ linear unabhängig? Sind v_1, v_2, $v_1 + v_3$ linear unabhängig?

(c) Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? Bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(d) Bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

(e) Geben Sie ein $v_5 \in \mathbb{R}^3$ an so, dass die Vektoren v_2, v_4, v_5 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe P 27. *Vektorraum der Polynome*

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{Pol}_k \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j X^j \,\middle|\, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens k.

(a) Gegeben seien die Basis $A\colon 1, X, X^2, X^3 + X^2$ von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$, sowie $p(X) := X^3 + 2X^2 - 3$ und $q(X) := 4X - 2$ in $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ${}_A p$, ${}_A 0$ und ${}_A(2p - q^2)$.

(b) Ist $B\colon 1,\ 1 + X,\ 1 + X + X^2$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$? Welche Dimension hat $\operatorname{Pol}_2 \mathbb{R}$? Welche Dimension hat $\operatorname{Pol}_k \mathbb{R}$?

Aufgabe P 28. *Vektorprodukt, Ebenen, Hesse-Normalform*

(a) Berechnen Sie $(1, 1, 1) \times (1, 2, 3)$ und $(1, 2, 3) \times (3, 3, 3)$.

(b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle (1, 2, 1) \,|\, x \rangle = 2 \right\}$.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene

$$\left\{ (\tfrac{5}{2}, 0, 0) + \lambda(-3, 4, 1) + \mu(3, -4, 0) \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.11. – 20.12.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Zum Üben für die Scheinklausur am 16.12. finden Sie unter

https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/folgen-reihen-sk-2023.pdf

mögliche Fragestellungen aus dem Themenbereich „Folgen und Reihen“. Zu allen weiteren relevanten Themenbereichen finden Sie Beispielaufgaben im Archiv

https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/scheinklausuren/sk.html

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 36. *Lagrange-Polynome*
Wir betrachten die Abbildung

$$\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle :\ \operatorname{Pol}_3\mathbb{R}\times\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon\ \langle p\,|\,q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)+p(3)q(3)$$

und die Polynome

$$f_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad f_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$f_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad f_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ die Skalarprodukt-Eigenschaften 1,2,3 und 4 aus 3.5.1 erfüllt.

(b) Berechnen Sie $\langle f_j\,|\,f_i\rangle$ für alle $i,j\in\{0,\dots,3\}$.

(c) Begründen Sie mit **(b)**, dass f_0, f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

Aufgabe H 37. *Lagrange-Polynome 2*
Diese Aufgabe setzt **H 36** fort.

(a) Begründen Sie, dass $F\colon f_0, f_1, f_2, f_3$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ ist.

(b) Finden Sie ein Polynom $p\in\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ so, dass $p(j)=2^j$ für alle $j\in\{0,1,2,3\}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $p = \frac{\langle p|f_0\rangle}{\langle f_0|f_0\rangle}f_0 + \frac{\langle p|f_1\rangle}{\langle f_1|f_1\rangle}f_1 + \frac{\langle p|f_2\rangle}{\langle f_2|f_2\rangle}f_2 + \frac{\langle p|f_3\rangle}{\langle f_3|f_3\rangle}f_3$ für alle $p\in\operatorname{Pol}_3\mathbb{R}$ gilt.

(d) Berechnen Sie ${}_Fp$ für $p(X)=X^2+X-1$ mit Hilfe von **(c)**.

Aufgabe H 38. *Ebenen und Spiegelung*
Sei $E=\left\{x\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\langle n\,|\,x\rangle = d\right\}$ mit $n\in\mathbb{R}^3\smallsetminus\{0\}$ und $d\geqq 0$ eine Ebene. $y\in\mathbb{R}^3$ heißt *Spiegelbild* von $x\in\mathbb{R}^3$ an E, falls $\frac{1}{2}(x+y)\in E$ und falls $x-y=\alpha n$ für ein $\alpha\in\mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie: $x+2tn$ ist das Spiegelbild von x an E, wenn $t\in\mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $x+tn\in E$. Interpretieren diese Konstruktion eines Spiegelbildes geometrisch.

(b) Seien nun $n=\frac{1}{5}(4,3,0)$ und $d=2$. Bestimmen Sie das Spiegelbild der Geraden $g=(1,0,0)+\mathbb{R}(1,1,1)$ an E. Hier verstehen wir unter dem Spiegelbild die Menge

$$\left\{y\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\text{Es gibt ein } x\in g \text{ so, dass } y \text{ das Spiegelbild von } x \text{ an } E \text{ ist}\right\}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass es sich bei diesem Spiegelbild wieder um eine Gerade handelt.

Aufgabe H 39. *Ebenen und Schnitte*
Seien $E_1=\left\{(0,1,0)+t(2,1,0)+s(3,4,1)\,\middle|\,t,s\in\mathbb{R}\right\}$, $E_2=\left\{x\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\langle(1,0,3)\,|\,x\rangle=2\right\}$ und $E_3=\left\{x\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\langle(1,1,4)\,|\,x\rangle=5\right\}$. Bestimmen Sie $E_1\cap E_2$, $E_2\cap E_3$ und $E_1\cap E_2\cap E_3$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Summen*

Sei $n\in\mathbb{N}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\displaystyle\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+3}^{n+3}\left(\sum_{k=0}^{16}(j-i-2)\right)\right)$.