A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

9. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 29. *Rechnen mit Matrizen*

Berechnen Sie für folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 & 10 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

folgende Werte, falls diese definiert sind.

(a) AB **(b)** BA **(c)** Ax **(d)** xA **(e)** B^2

(f) $A + B$ **(g)** $B + A$ **(h)** $B^\intercal A^\intercal A$ **(i)** $(x^\intercal A)x$ **(j)** C^k für $k \leqq 5$

Hinweis: Potenzen von Matrizen sind (wie Potenzen von Zahlen) rekursiv definiert:
Für jede $n \times n$ Matrix $X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $X^0 := \mathrm{E}_n$ und $X^{k+1} := X^k X$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe P 30. *Lineares Gleichungssystem, Gauß-Algorithmus*

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}-2x_4} &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A\|b]$ auf. Formen Sie die Koeffizientenmatrix in die in Satz $4.7.2$ angegebene Form um.

(b) Geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems an. Verwenden Sie diese und **(a)** zur Ermittlung der Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

(c) Sei b' der erste Spaltenvektor von A und b'' der zweite. Berechnen Sie die Lösungmengen der Gleichungssysteme zu $[A\|b']$ und $[A\|b'']$.

(d) Finden Sie einen Vektor c so, dass das lineare Gleichungssystem zu $[A\|c]$ unlösbar ist.

Aufgabe P 31. *Ingenieure beim Glücksspiel*

André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford spielen ein Würfelspiel, bei dem jeder mit einem Würfel genau einmal würfeln darf. Rudolf Diesel würfelt nur eine halb so hohe Augenzahl wie Henry Ford und André Citroën zusammen. Dahingegen würfelt Henry Ford eine genauso hohe Augenzahl wie die anderen beiden gemeinsam. Wenn André Citroën, Rudolf Diesel und Henry Ford zusammengenommen genau die bei einem Würfel höchstmögliche Augenzahl würfeln, welche Augenzahl würfeln dann die einzelnen Ingenieure?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.12. – 10.01.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 41. *Gauß–Algorithmus*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssytem S :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mit Hilfe des Gauß–Algorithmus in die in Satz 4.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssytems S_H. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

Aufgabe H 42. *Weihnachtsbäckerei*

Sie wollen drei Plätzchensorten backen, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen.

Spitzbuben 35 Stk:	300g Mehl, 150g Zucker, 120g Butter, 1 Ei
Vanillekipferl 25 Stk:	250g Mehl, 10g Zucker, 125g gemahlene Mandeln, 250g Butter
Mürbeteigplätzchen 30 Stk:	200g Mehl, 50g Zucker, 100g Butter, 2 Eier.

In Ihrem Vorratsschrank und Kühlschrank finden Sie 2.5kg Mehl, 1kg Zucker, 1.35kg Butter, 10 Eier und 500g gemahlene Mandeln, sowie reichlich von allen übrigen nicht explizit genannten Zutaten. Wieviel Plätzchen von welcher Sorte können Sie damit maximal backen, wenn Sie die gesamte Butter und die Eier aufbrauchen wollen?
Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Butter und Eier ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Schließen Sie dann mit den Informationen über die übrigen Zutaten alle Lösungen aus, die nicht realisierbar sind. Insbesondere sollen nur ganze Plätzchen gebacken werden.

Aufgabe H 43. *Etwas Kryptographie*

Bei dem ASCII Code wird jeden Zeichen aus dem standardisierten Zeichensatz

$$\Sigma := \{A,\ B,\ \dots,\ Z,\ a,\ b,\ \dots,\ z,\ @,\ \sim,\ [,\ ],\ \{,\ |,\ \},\ \dots,\ \texttt{Del},\ \dots\}$$

eine Zahl in 7 Bit Codierung zugeordnet. Der vollständige standardisierte Zeichensatz ist im Internet zu finden. Jede dieser Zahlen können wir auffassen als einen Vektor in $\mathbb{R}^7$ mit Einträgen aus $\{0,1\}$ und damit definiert die Zuordnung des Codes eine Abbildung $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{R}^7$. Diese Abbildung erfüllt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\psi(A) &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(a) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^\intercal, \\
&\ \ \vdots & &\ \ \vdots \\
\psi(Z) &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(z) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal, \\
\psi(\{) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(|) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\intercal, \\
\psi(\sim) &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^\intercal, & &\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nun definieren wir $\Sigma^* := \left\{a_1 \ldots a_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \Sigma \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\right\}$, die Menge der endlich langen Wörter mit Buchstaben aus dem Alphabet Σ, und die bijektive Abbildung

$$\Psi \colon \Sigma^* \to \Psi(\Sigma^*) \colon \; \Psi(a_1 \ldots a_m) = \begin{pmatrix} \psi(a_1) & \ldots & \psi(a_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times m}.$$

Mit dieser Abbildung gilt beispielsweise

$$\Psi(Santa) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = Claus$$

Bestimmen Sie nun:

(a) $\Psi(Lebkuchen)$ und $\Psi(Plaetzchen)$.

(b) $$\Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } \Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(c) $\Psi(Ho)^\intercal \Psi(ho) \Psi(ho)^\intercal$ und die Polarkoordinatendarstellung von $|\Psi(a)| + \mathrm{i}|\Psi(b)|$.

(d) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\Psi(Keks)^\intercal x = (1, 2, 3, 4)^\intercal$.

Aufgabe H 44. *Etwas Kryptograhpie 2*

Einer unserer Wichtel hat uns die folgende verschlüsselte Nachricht zukommen lassen:

> Gfhtzntz htlggq tlzt| dzptctz pdg vtbtz wdg |dz d| xltbgqtz gtxbtc bthdxqtz |∼tfhqt
>
> Gtx|d Xdvtcx∼tr

Für die Entschlüsseln hat er uns den Hinweis gegeben, dass für die buchstabenweise Verschlüsselung die Abbildung Ψ aus **H 43** und eine Matrix aus $\mathbb{R}^{7\times 7}$ verwendet wurden. Außerdem wird das Wort Geschenk zu Vtgfhtzn verschlüsselt. Gehen Sie nun wie folgt vor:

(a) Seien $\mathcal{A} := \Psi(Vtgfhtzn)^\intercal$ und $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_7) = \Psi(Geschenk)^\intercal$. Bestimmen Sie ohne den Gauß–Algorithmus, für $i \in \{1, \ldots, 7\}$, eine Lösung $x_i \in \mathbb{R}^7$ des Gleichungssystems $\mathcal{A}x_i = b_i$.

Hinweis: Schauen Sie sich die Spalten von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genau an.

(b) Rechnen Sie nach, dass gilt

$$\mathcal{X}\Psi(Vtgfhtzn) = \Psi(Geschenk) \quad \text{für die Matrix} \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_1^\intercal \\ \vdots \\ x_7^\intercal \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$$

(c) Entschlüsseln Sie so viele Buchstaben der Nachricht mit Hilfe von $\mathcal{X}$, bis Sie die übrigen erraten können.

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|2x + 3| \geqq (x + 1)^2$$