A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

10. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 32. *Linearität, Matrixbeschreibung*

Entscheiden Sie, ob φ eine lineare Abbildung ist und geben Sie in diesem Fall eine beschreibende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis an.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ 3y \end{pmatrix}$

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe P 33. *Matrixbeschreibung Polynome*

Es sei $\mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leqq 4$. Wir definieren $e_i := X^i$ und $b_i := \sum_{j=0}^{i} X^i$, für $0 \leqq i \leqq 4$. Dann sind $E : e_0, e_1, \ldots, e_4$ und $B : b_0, b_1, \ldots, b_4$ Basen von $\mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie das Koordinatentupel von b_i bezüglich E für $i = 0, 1, \ldots, 4$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B(\mathrm{id})_E$ sowie ${}_B(\alpha)_E$, wobei $\alpha : \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ die formale Ableitung von Polynomen ist.

(c) Es sei α^3 die Komposition $\alpha \circ \alpha \circ \alpha : \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$. Was sind die Koordinatentupel von $\alpha^3(e_3)$ und $\alpha^3(b_4)$ bezüglich B?

Aufgabe P 34. *Rang, Invertieren*

Berechnen Sie jeweils den Zeilen- und Spaltenrang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche dieser Matrizen sind invertierbar? Für die invertierbaren Matrizen, berechnen Sie die Inverse.

Aufgabe P 35. *Wahr oder falsch?*

Seien A und B zwei invertierbare reellwertige Matrizen. Entscheiden Sie, ob die gegebenen Sätze wahr oder im Allgemeinen falsch sind:

(a) $A + B$ ist invertierbar.

(b) B^{T} ist invertierbar.

(c) AB^{-1} ist invertierbar.

(d) λA ist invertierbar für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.01.-17.01.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 46. *Linearität*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{K}$-linear?

(a) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + ib \to a - ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

(c) $\gamma : \mathrm{Pol}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(1) + p(0)$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(d) $\varphi : \mathrm{Pol}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) + 1$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(e) $\psi_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v \mid w \rangle$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und ein $w \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*

Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellwertigen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils ein Links- oder Rechtsinverses der Matrizen, vorausgesetzt diese existieren.

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 9 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & \alpha & 2\alpha + 6 & -\alpha + 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Bestimmen Sie für $\alpha = -5$ das Inverse von A. Bestimmen Sie für $\alpha = 6$ eine Basis vom Kern und eine Basis vom Bild von A.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\colon (x, y)^\intercal \mapsto (2x + y, x, -y)^\intercal$, $\mathrm{id}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto x$ und $\mathrm{id}_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto x$. Wir benutzen die Standardbasis E_2 und eine weitere Basis $B\colon b_1 := (2, 2)^\intercal$, $b_2 := (-1, 2)^\intercal$ von $\mathbb{R}^2$, sowie die Standardbasis E_3 und eine weitere Basis $C\colon c_1 := (1, 0, 1)^\intercal$, $c_2 := (0, 1, 1)^\intercal$, $c_3 := (2, 0, 0)^\intercal$ von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_{E_3}(\mathrm{id}_3)_C$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α. Wie muss α gewählt werden damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt.