A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

11. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 36. *Entwicklungssatz von Laplace*

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det A$ durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

(b) Entwickeln Sie nun $\det A$ nach einer Zeile oder Spalte Ihrer Wahl.

(c) Berechnen Sie $\det A$ unter Verwendung elementarer Umformungen (Gauß -Algorithmus).

(d) Bestimmen Sie alle $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\det(\mu A) = 1$.

Aufgabe P 37. *Eigenschaften von Determinanten*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie $\det A$, $\det B$ und $\det C_0$.

(b) Bestimmen Sie $\det(AB^{-1})$, $\det(-2B)$ und $\det(A^\intercal C_0^\intercal)$ mit Hilfe von **(a)**.

(c) Untersuchen Sie die Matrix C_t auf Invertierbarkeit.

Aufgabe P 38. *Determinanten von Block-Dreiecksmatrizen*

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 13 & 99 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2 & 3 & -1 \\ 1-\mathrm{i} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5+\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P 39. *Matrixnorm und Reihen*

Bestimmen Sie die Matrixnorm (Definition 4.14.1) und, falls möglich, den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} X^j$ für jede der folgenden Matrizen X.

(a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $X = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.01. – 24.01.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 51. *Volumen und Determinanten*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren u_α , v und w durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad u_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von u_α , v und w aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen des von Au_α , Av und Aw aufgespannten Spats.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Volumen des von Au_α , Av und Aw aufgespannten Spats gleich 65? Was ist das Volumen des von u_α , v und w aufgespannten Spats in diesem Fall?

(d) Berechnen Sie die Determinante von A. Wie hängen die in (a) und (b) berechneten Volumina mit der Determinante zusammen?

Aufgabe H 52. *Rechenregel für Determinanten*

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 2 & 0 \\ 1 & t^2 & 6 & 3 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

(b) Berechnen Sie $\det(\frac{1}{3}A)$, $\det(A + B^\intercal)$ und $\det(A^{-1}B^3)$.

(c) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix C_t. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist C_t invertierbar?

Aufgabe H 53. *Blockmatrizen*

Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Matrix $G_N \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ gegeben:

$$G_N = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,N} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N,N} \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad A_{n,m} = \begin{pmatrix} m^2 + 2m & 0 \\ n & \dfrac{1}{n^2 + 3n + 2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A_{5,5})$.

(b) Bestimmen Sie $\det(A_{n,n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie damit $\det(G_N)$.

(c) Für welche N ist $\det(2G_N) = \dfrac{512}{3}$?

Aufgabe H 54. *Matrixnorm und Reihen*

(a) Prüfen Sie, ob die Matrixnorm von X kleiner 1 ist und bestimmen Sie, falls möglich, den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} X^j$ für jede der folgenden Matrizen X.

(i) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **(ii)** $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-j-1} \\ 0 & c^k \end{pmatrix} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j-1}$$

Hinweis: Verwenden Sie **(a)(ii)** und **(b)**.

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Basen*

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^5$ und die Vektoren v, e_3:

$$B: \quad b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_5 := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = (4, 3, 2, 1, 0)^\intercal, \qquad e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)^\intercal.$$

Bestimmen Sie den Koordinatenvektoren ${}_Bv$, ${}_Be_3$ und ${}_B(v - 2e_3)$.