A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

12. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 40. *Lösbarkeit von LGS*

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die Dimension des Lösungsraums über dem Körper $\mathbb{K}$, ohne eine konkrete Lösung zu berechnen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildung $x \mapsto Ax$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **(b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 0 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **(d)** $A = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 9i & 3+3i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2i \\ 6i \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aufgabe P 41. *Gauß-Algorithmus*

Gegeben sei das LGS $S: \quad Ax = b$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus:

(a) $\operatorname{Rg} A$ und die Dimension der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(b) eine spezielle Lösung v_{sp} von S.

(c) $\mathcal{L}(S)$.

Aufgabe P 42. *Orthogonale Matrizen und orthogonale Abbildungen*

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

sowie die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \colon v \mapsto Av.$$

(a) Ist A orthogonal? Bestimmen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \alpha(x) = b \right\}$.

(c) Ist α injektiv? Ist α surjektiv?

(d) Bestimmen Sie $\det(A^5)\det((A^{\mathsf{T}})^4)$.

Aufgabe P 43. *Gram-Schmidt und Orthonormalbasen*

Gegeben seien die Vektoren u_1, u_2, u_3 und u mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Vektorräume $U := \mathrm{L}(u_1, u_2)$ und $W := \mathrm{L}(u_3)$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ von U und eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $U \cup W$.

(b) Bestimmen Sie $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ gilt.

(c) Sei A die Matrix mit den Vektoren v_1, v_2 und v_3 als ihre Spalten, also $A = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)$. Bestimmen Sie A^{-1}.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 25.01. – 31.01.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 56. *Lösungsverhalten von LGS*

Gegeben seien die Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b(t) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & t \\ 1 & 0 & t+3 & -3 \\ -2 & t-1 & t & -t+3 \end{pmatrix}, \; b(t) := \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das Gleichungssystem $A(t)x = b(t)$ an (Dreiecksform genügt).

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix $A(t)$ sowie die Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $A(t)x = 0$.

(c) Für welche Werte von t ist das inhomogene Gleichungssystem $A(t)x = b(t)$ lösbar? Für welche t ist die Lösung nicht eindeutig?

(d) Bestimmen Sie für einen Wert von t aus (c) für welchen die Lösung nicht eindeutig ist die Lösungsmenge von $A(t)x = b(t)$.

Aufgabe H 57. *LGS*

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}, \; b := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Was ist der Rang von A und wie hängt dieser mit der Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ zusammen?

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^6$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe H 58. *Gram-Schmidt, Isometrie*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, und der Vektorraum $U = \mathrm{L}(A_1, A_2, A_3)$ mit Skalarprodukt $\langle A \,|\, B \rangle_U = \mathrm{Sp}(A^\mathsf{T} B)$ (Definition 5.6.19) und $|A|_U = \sqrt{\langle A \,|\, A \rangle_U}$ für $A, B \in U$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis von U.

Hinweis: Der Gram-Schmidt-Algorithmus funktioniert auch für Matrizen, wobei das innere Produkt für Vektoren durch das hier angegebene ersetzt wird.

(b) Sei $T\colon U \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, so dass

$$T(A_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T(A_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T(A_3) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie β so, dass T eine Isometrie ist, also $|M_1 - M_2|_U = |T(M_1) - T(M_2)|$ für alle $M_1, M_2 \in U$ gilt.

Aufgabe H 59. *Drehungen und Isometrien*

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i, j \leqq 3$, und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a_{22} = 1$ bestimmen Sie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i, j \leqq 3$ so, dass A eine Drehung um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ ist. Bestimmen Sie außerdem φ.

(b) Bestimmen Sie anhand der Werte aus Teil (a) die Fixpunktmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Ax = x\right\}$.

(c) Betrachten Sie $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $T(v) = Av+b$ für $v \in \mathbb{R}^3$. Für $a_{11} = a_{33}$, $a_{13} = -a_{31}$ und $a_{22} = 1$, bestimmen Sie $\left\{(a_{11}, a_{13}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, T \text{ ist eine Isometrie}\right\}$.

(d) Für $a_{11} = a_{33}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{11}^2 + a_{13}^2 = 1$ und $a_{22} = \alpha$ bestimmen Sie die Menge $\left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |Av| = |v|\right\}$.

Hinweis: Die Antwort ist von α abhängig.

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomfunktionen*

Bestimmen Sie alle Nullstellen folgender Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto p(z)$.

(a) $p_1(z) := z^4 + 2z^3 - z - 2$

(b) $p_2(z) := z^2 + (2 + 2\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} + 1$

Hinweis: Die Mitternachtsformel kann auch für Polynome über $\mathbb{C}$ angewendet werden.