A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

13. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Präsenzübungen

Aufgabe P 44. *Koordinatentransformation*

Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem für $\mathbb{R}^2$. Weiter seien gegeben

$$_{\mathbb{E}}P = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie $_{\mathbb{F}}P$ und $_{\mathbb{G}}P$.

(b) Bestimmen Sie $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und $_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{F}}$.

Aufgabe P 45. *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, B und C.

(b) Bestimmen Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert von A, B und C.

Aufgabe P 46. *Eigenwerte, Spur und Determinant*

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{8} & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte mit Hilfe der Spur und der Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Berechen Sie die Spur und die Determinante mit Hilfe der Eigenwerte von B.

Aufgabe P 47. *Konjugierte Matrizen*

Sei A, T, D 3×3 Matrizen, mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

so dass $A = TDT^{-1}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$, bestimmen Sie A^n, bezuglich T und D.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Hinweis: $A^0 = I$.

(c) Wenn $|d_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$, bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 01.02. – 07.02.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 61. *Konjugierte Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 32 & 12 \\ -19 & 4 & 28 & -12 \\ -10 & -14 & 1 & 6 \\ 18 & -18 & 9 & 36 \end{pmatrix},$$

und die Orthogonale Matrix

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob B konjugiert zu A.

(b) Sei

$$b^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Loesung des lineare Gleichungssystems $Ay = c$, wobei $c = Tb$.

(ii) Bestimmen Sie die Loesung des lineare Gleichungssystems $Bx = b$.
Hinweis: Sei $y = Tx$ in (i).

Aufgabe H 62. *Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren*

Geben die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenwektoren von A.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, B eine $(n \times n)$-reelle Matrix mit Eigenwerte $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ und die entsprechende Eigenvektoren $u = v + iw$, mit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie Bv und Bw bezuglich a, b, v und w.

(c) Sei

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+i)$ und $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, und die entsprechende Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \overline{u_2}.$$

Schreiben Sie $\lambda_2 = a_2 + b_2 i$, $u_2 = v_2 + w_2 i$, und sei $T = [u_1 \quad v_2 \quad w_2]$, die Matrix mit den Spalten u_1, v_2 und w_2. Mit Hilfe des vorherigen Teils, bestimmen Sie Q, so dass $CT = TQ$.

Aufgabe H 63. *Koordinatensyteme*

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme und $\mathbb{E}$ das Standdardkoordinatensystem. Gegeben seien die Punkte

$$
{}_{\mathbb{E}}P = (\,1\;\;0\;\;-1\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{E}}Q = (\,-3\;\;4\;\;-2\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{E}}R = (\,-7\;\;2\;\;-1\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{E}}S = (\,-5\;\;4\;\;-1\,)^{\mathsf{T}},
$$
$$
{}_{\mathbb{G}}P = (\,0\;\;0\;\;0\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{G}}Q = (\,1\;\;0\;\;1\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{G}}R = (\,2\;\;0\;\;0\,)^{\mathsf{T}},\quad {}_{\mathbb{G}}S = (\,1\;\;-1\;\;1\,)^{\mathsf{T}},
$$

sowie die Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ und ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

(b) Sei $\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} v.$ und ${}_{\mathbb{G}}\tilde{P} = (1,2,1)^{\mathsf{T}}$. Bestimmen Sie $\alpha({}_{\mathbb{G}}\tilde{P})$.

Aufgabe H 64. *Eigenvektoren, Diagonalisierbare Matrizen und Funktionen*

Gegeben sei Matrix

$$
A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(a) Bestimmen Sie (λ_i, u_i), $i = 1,2,3$, die Eigenwerte und Einheitsnorm-Eigenvektoren von A, mit $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$.

(b) Sei T die Matrix mit den Spalten u_1, u_2, u_3, in dieser Reihenfolge, und D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in dieser Reihenfolge, in der Diagonale. Überprüfen Sie $A = TDT^{\mathsf{T}}$.

(i) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^6 + x^5 + x$. Bestimmen Sie $p(A)$.
Hinweis: Es ist $A = TDT^{\mathsf{T}}$.

(ii) Sei $B = I - A$, $S(n) = \sum_{k=0}^{n} A^k$ und $S = \lim_{n\to\infty} S(n)$. Bestimmen Sie BS.
Hinweis: P47 oder Teleskopsumme.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Teleskopsumme*

Sei $z_1 = \frac{i}{2}$ und $z_2 = 1 + i$.

(a) Bestimmen Sie

$$
\sum_{k=0}^{n} z_1^k.
$$

(b) Bestimmen Sie

$$
\sum_{k=3}^{15} \left(\frac{1}{z_2^2 + 2k} - \frac{1}{2 + z_2^2 + 2k} \right).
$$

Schreiben Sie Ihre Antwort in das Formular $\frac{a}{b+ic} + \frac{d}{e+if}$.