J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

24. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 89. *kritische Stellen, Richtungsableitung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto x^4 - 2x^2 + y^2$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen bis zweiter Ordnung.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^\intercal$ an der Stelle $(1,0)^\intercal$.

(c) Berechnen Sie die kritischen Stellen von f.

Aufgabe P 90. *3D-Modell – Schmiegquadriken*

Der Graph der Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \cos(x_1)\cos(x_2)$ ist im vorliegenden Modell dargestellt. Um den Einblick zu erleichtern, ist bei $\left(\begin{smallmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Fenster aus dem gelben Funktionsgraph ausgeschnitten.

Betrachten Sie die Stellen $P_1 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 := \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}$ und $P_3 := \begin{pmatrix} -\pi/2 \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$.

(Falls Sie eine Onlinegruppe besuchen: Das Modell finden Sie unter https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/05/.)

(a) Wo etwa verlaufen die Koordinatenachsen im Modell? Wo ist der Punkt $(0,0,1)^\intercal$?

(b) Bestimmen Sie $T_2(f,x,P)$ für $P \in \{P_1, P_2, P_3\}$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichungen der zugehörigen Schmiegquadriken sowie jeweils die Gestalt der Quadrik. Passen Ihre Ergebnisse zum Modell?

Aufgabe P 91. *Lokale Extrema und Nullstellenmenge*

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^3 y^2$.

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge $\mathcal{N} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = 0 \right\}$ und die Vorzeichenverteilung von f.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\mathrm{H}f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.
Bestimmen Sie ferner $\det(\mathrm{H}f(P))$ für alle $P \in \mathcal{N}$.

(c) Bestimmen Sie nun alle kritischen Stellen von f und geben Sie deren Typ an.

Aufgabe P 92. *Gradienten und Richtungsableitungen*

Betrachen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1 \cdot \mathrm{e}^{x_2}$.

(a) Sei $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ und $v := r\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$.
Bestimmen Sie die Ableitung von f längs v.
Für welche r ist dies eine Richtungsableitung?

(b) Bestimmen Sie zu $r = 1$ den Winkel φ so, dass $\partial_v f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ maximal wird.

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 27.06. – 03.07.) auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 116. *Gradienten und Niveaumengen*

Gegeben seien die Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \dfrac{\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}}{(1+x_3^2)^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} g$.

(b) Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Niveau $c = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \nabla g\,(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Aufgabe H 117. *Kritische Stellen und Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \left(\mathrm{e}\, y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^5 - 5y_2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(y)$ und $\mathrm{H}f\,(y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und entscheiden Sie jeweils, ob in diesen lokale Extrema oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 118. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Gegeben sei die Funktion *Luxemburg*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \dfrac{y^2}{\mathrm{e}}$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ sowie die kritischen Stellen.

(b) Sei $\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right\}$ der zugehörige Graph. Skizzieren Sie die Schnitte von $\mathcal{G}$ mit der x-z- sowie mit der y-z-Ebene in ein geeignetes Koorinatensystem für $(x,y)^\intercal \in [-3,3] \times [-3,3]$.
Hinweis: Zum Auswerten der Funktion an Teststellen dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder ein vergleichbares elektronisches Hilfswerkzeug benutzen.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob an den kritischen Stellen lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 119. *Schmiegquadriken*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\cos(1-x^2)}{1+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Geben Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades in den Entwicklungspunkten $P = \binom{0}{0}$ und $Q = \binom{1}{0}$ an.

(c) Klassifizieren Sie die Schmiegquadriken in diesen Punkten gemäß 7.3.7/7.3.8.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120.

Gegeben seien die Vektoren $u_1 = (2,4,2,-2,6)^\intercal$, $u_2 = (1,8,5,-1,3)^\intercal$ und $u_3 = (1,16,1,-3,9)^\intercal$. Bestimmen Sie ein ONS $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}\,(u_1) = \mathrm{L}\,(f_1)$, $\mathrm{L}\,(u_1,u_2) = \mathrm{L}\,(f_1,f_2)$ und $\mathrm{L}\,(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{L}\,(f_1,f_2,f_3)$.