J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

25. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 93. *Extrema unter Nebenbedingungen*

Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Die Nebenbedingung kann als $y^2 = 1 - x^2$ geschrieben werden. Ersetzen Sie y^2 im Funktionsterm von f und untersuchen Sie die entstehende Funktion in einer Veränderlichen auf Extrema.

(b) Benutzen Sie die Multiplikatormethode von Lagrange.

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe P 94. *Multiplikatormethode nach Lagrange*

Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2xz + y^2 + 3 = 0 \right\}$. Finden Sie die Punkte in M, die den kleinsten Abstand vom Ursprung haben.

Aufgabe P 95. *Extrema mit Parametrisierungen*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy - x$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \left\langle \binom{1}{-1} \;\middle|\; \binom{x}{y} \right\rangle$ und $M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g\left(\binom{x}{y}\right) = 0 \right\}$.

(a) Wieso können Sie nicht von vornherein auf die Existenz von globalen Extremalstellen der Einschränkung $f|_M$ schließen?

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung α für M.

(c) Bestimmen Sie Kandidaten für lokale Extrema von f auf M mit Hilfe der gefundenen Parametrisierung.

(d) Entscheiden Sie für diese, ob es sich um lokale/globale Minima/Maxima oder nichts davon handelt.

Aufgabe P 96. *Existenz von Extrema*

Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\cos(y)$ sowie die Mengen

$$\mathcal{A} := \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\} \quad , \quad \mathcal{B} := \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1,1]\} \quad , \quad \mathcal{C} := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$

(a) Für welche Mengen $\mathcal{M} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ ist die Einschränkung $f|_{\mathcal{M}}$ beschränkt?

(b) Für welche dieser Mengen nimmt $f|_{\mathcal{M}}$ einen Maximalwert an?

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 04.07. – 10.07.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 121. *Extrema mit Vorzeichenverteilung*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y)^\intercal \mapsto \cos\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2+y^2}\right)\right)$.

- **(a)** Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{N}_0 = \left\{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f((x,y)^\intercal) = 0\right\}$ sowie die Vorzeichenverteilung von f.
- **(b)** Bestimmen Sie $\nabla f\left((x,y)^\intercal\right)$ sowie kritischen Stellen.
- **(c)** Ergänzen Sie Ihre Skizze um die kritischen Stellen und entscheiden Sie mit (a), ob an diesen lokale Minima oder Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe H 122. *Extrema mit Lagrange*

Gegeben seien die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{8}{3}x_1^2 + x_2^2$ und

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{6}(x_1+1)^6 - \frac{1}{5}(x_1+1)^5 + 3x_2^2$.

Wir suchen die Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$.

- **(a)** Stellen Sie das Lagrange-System auf.
- **(b)** Bestimmen Sie alle kritischen Stellen inklusive ihrer Lagrange-Multiplikatoren.
- **(c)** Bestimmen Sie das absolute Maximum von f auf D.

Aufgabe H 123. *Extrema auf abgeschlossenen Kugeln*

Durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird mittels $\langle x \,|\, y\rangle_A = x^\intercal A y$ ein Skalarprodukt sowie mittels $\|x\|_A = \sqrt{\langle x \,|\, x\rangle_A}$ eine („Energie"-)Norm induziert. Sei nun $n = 3$ und A die positiv definite Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

- **(a)** Bestimmen Sie die Lösungen des Gleichungssystems nach Lagrange für das Problem:

$$\max_{x\in D} \frac{1}{2}\|x\|_A^2 \quad \text{mit} \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x|^2 = 25\right\}$$

- **(b)** Bestimmen Sie $\tilde{x} \in \tilde{D} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x|^2 \leqq 25\right\}$ mit $\|\tilde{x}\|_A \geqq \|x'\|_A$ für alle $x' \in \tilde{D}$.

Aufgabe H 124. *Extrema mit Parametrisierungen*

Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto \frac{1}{4}x^2y - \frac{2}{3}x^2$ und $D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$.

- **(a)** Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $\min\limits_{(x,y)^\intercal \in D} f\left(\binom{x}{y}\right)$ mit der Lagrange-Methode.
- **(b)** Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels einer geeigneten Parametrisierung.
- **(c)** Entscheiden Sie jeweils, ob in diesen ein lokales oder globales Minimum oder Maximum oder nichts dergleichen vorliegt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 125. *Hesse-Normalform*

Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der folgenden Ebene:

$$E = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$$