J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

26. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Präsenzübungen

Aufgabe P 97. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Felder direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich aller dabei auftretenden Funktionen.

(a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$
mit $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ und $f_2(t) = \sin(t)$,

(b) $g(t) = g_2(g_1(t))$
mit $g_1(t) = (\sin(t), \cos(t))^\intercal$ und $g_2(x, y) = (xy, x^3, y^2)^\intercal$.

Aufgabe P 98. *Geometrische Eigenschaften von Gradienten*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x - y)(x^2 + y^2 - 4)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge $N_0 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$.

(b) Berechnen Sie ∇f.

(c) In welchen der folgenden Punkte existieren Tangenten an N_0? Berechnen Sie an diesen Punkten die Tangenten und zeichnen Sie sie in Ihre Skizze ein.

- $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\left(\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe P 99. *Jacobi-Matrix und Kettenregel*

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 - 4yz + 3z$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$. Berechnen Sie $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$ ohne die Kettenregel zu verwenden.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{J}f$ und $\mathrm{J}g$ und mit der Kettenregel $\mathrm{J}(f \circ g)$ und $\mathrm{J}(g \circ f)$.

Aufgabe P 100. *Gradientenfeld*

Überprüfen Sie, bei welchen der folgenden Funktionen sich es um ein Gradientenfeld handelt.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y)^\intercal \mapsto (2x + \mathrm{e}^x, 2y)^\intercal$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y)^\intercal \mapsto (\cos(2x)\cos(x + y^2), 2y\cos(2x)\cos(x + y^2))^\intercal$

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x, y)^\intercal \mapsto (y\sinh(y), (xy + 1)\cosh(y) + x\sinh(y))^\intercal$

Online-Aufgabe

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.07. – 17.07.)
auf folgender Webseite.

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/`

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Aufgabe H 126. *Differentiationsregeln*

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel 4.8.3. Untersuchen Sie den maximalen Definitionsbereich aller dabei auftretenden Funktionen sowie der Verkettung selbst.

(a) $\binom{x}{y} \mapsto f_1\left(f_2\left(\binom{x}{y}\right)\right)$ mit $f_1(t) = \arcsin(t)$ und $f_2\left(\binom{x}{y}\right) = \exp(-x^2 - y^2)$.

(b) $\binom{u}{v} \mapsto g_1\left(g_2\left(\binom{u}{v}\right)\right)$ mit $g_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 z - y \\ xy + \sqrt{z} \\ x - y - zxy \end{pmatrix}$ und $g_2\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v + 1 \\ uv \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Diskussion muss nicht für die Jacobi-Matrix erfolgen.

Aufgabe H 127. *Verhalten von Gradienten – Skizze von Kurven*

Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto xy - y^2 + x$.

(a) Berechnen Sie $\nabla g\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten in den Punkten $\binom{x}{y}$ mit $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ für $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

(c) Skizzieren Sie die Tangenten in diesen Punkten.

(d) Skizzieren Sie grob den Verlauf der durch $g\left(\binom{x}{y}\right) = 0$ gegebenen Kurve.

Hinweis: Arbeiten Sie mit folgenden Rundungswerten: $\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{5} \approx 2,2$, $\sqrt{21} \approx 4,6$.

Aufgabe H 128. *Rotation und Divergenz*

Geben sei das parameterabhängige Vektorfeld

$$f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \exp(\sin(x_3)) + 9x_2 \\ \alpha^2 x_1 + \cos(x_3) \\ -x_2 \sin(x_3) + x_1 \cos(x_3) \exp(\sin(x_3)) \end{pmatrix} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f_\alpha$ und $\operatorname{div} f_\alpha$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt f_α ein Potential?

(c) Berechnen Sie $\operatorname{div}\operatorname{rot} f_\alpha(x)$ für $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe H 129. *Extrema mit Jacobi-Matrix*

Geben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3\colon x \mapsto x_1^2 + x_3^2 + x_2 \quad , \quad g\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 9 \\ x_1^2 + x_3^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{M} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(x) = 0\right\}$

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(x)$ und $\mathrm{J}g\,(x)$.

(b) Weisen Sie nach, dass $\mathcal{M}$ beschränkt ist.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extremwerte der Einschränkung $f|_{\mathcal{M}}$.

Frischhaltebox

In Standardkoordinaten sei der Punkt X gegeben durch ${}_{\mathbb{E}}X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathbb{O} := \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.