J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

27. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

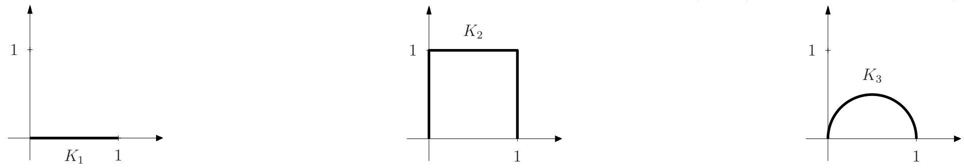
Präsenzübungen

Aufgabe P 101. *Parametrisierung, Kurvenintegrale*

Berechnen Sie für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x \mapsto |x|^2$ das Kurvenintegral

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

über die unten skizzierten Wege K_1, K_2 und K_3 vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,0)$.



Aufgabe P 102. *Rotation und Divergenz – Kommutierende Transformationen*

(a) Sei f gegeben durch $f(x) := (x_2^2, x_3, -x_1)^\intercal$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} f$ und $\operatorname{div} f$.

(b) Sei nun g gegeben durch $g(x) := f(x-(1,2,3)^\intercal) = ((x_2-2)^2, (x_3-3), -x_1+1)^\intercal$. Bestimmen Sie $\operatorname{rot} g(x)$ und $\operatorname{div} g(x)$ und vergleichen Sie dies mit

$$(\operatorname{div} f)\,((x_1-1, x_2-2, x_3-3)^\intercal) \qquad \text{und} \qquad (\operatorname{rot} f)\,((x_1-1, x_2-2, x_3-3)^\intercal).$$

Was fällt auf?

(c) Verallgemeinern Sie diese Regelmäßigkeit, indem Sie diese für den Vektor $(1,2,3)^\intercal$ durch den Parametervektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ersetzen und die Abbildung $\tilde{f}(x) := f(x-\alpha)$ betrachten.

Aufgabe P 103. *Potential und Kurvenintegrale*

Gegeben ist das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon\ (x_1, x_2)^\intercal \mapsto (x_1^2, x_1)^\intercal$ und die Parametrisierung der Kurve K durch $C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon \alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^\intercal$.

(a) Entscheiden Sie, ob v ein Potential besitzt.

(b) Berechnen Sie $\oint_K v(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe P 104. *Zirkulation und Ausfluss*

Gegeben seien die Ellipse $K = \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1\}$ und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y)^\intercal \mapsto (xy, y-x)^\intercal\,.$$

(a) Skizzieren Sie K.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung C von K an.

(c) Bestimmen Sie die Zirkulation von g längs K und den Ausfluss von g durch K.

Hausübungen (Abgabe in ILIAS):

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben zur freiwilligen Übung und gehen **nicht** in die Bewertung mit ein, es erfolgt **keine** ILIAS-Abgabe.
Eine Bearbeitung als Vorbereitung auf die Klausur ist dennoch ratsam. Einige dieser Aufgaben stammen in dieser bzw. ähnlicher Form aus Prüfungen früherer Semester.

Aufgabe H 130. *Gravitationspotential*

Wir fixieren die Erde in $P_E := (0,0,0)^\intercal$ sowie den Mond im Punkt $P_M := (0,0,1)^\intercal$. Das zugehörige Gravitationspotential sei (vgl. einleitendes Beispiel im Skript) gegeben durch:

$$U\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{P_E, P_M\} \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \frac{2m_E}{|x-P_E|} + \frac{2m_M}{|x-P_M|}$$

wobei m_E die Erdmasse und $m_M = \frac{1}{81}m_E$ die Mondmasse sei.

(a) Bestimmen Sie ∇U.

(b) Bestimmen Sie den Punkt P_G auf der Verbindungsstrecke von P_E und P_V, auf dem sich die Gravitationskräfte von Erde und Mond aufheben.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{div}(\nabla U)(P_G)$ und $\operatorname{rot} \nabla U(P_G)$.

Aufgabe H 131. *Kurvenintegrale*

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{pmatrix}$ und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$. Hat f ein Potential?

(b) Bestimmen Sie die Länge $L(C)$ für die durch γ parametrisierte Kurve C.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_C f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$ und $\int\limits_C |f(x)|\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe H 132. *Zirkulation und Ausfluss*

Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} -y+x \\ \exp\left(x^2+\frac{1}{4}y^2\right) \end{pmatrix}$ gegeben. Die Ellipse E habe Halbachsenlängen $a = 1$ und $b = 2$ und liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass die kleine Halbachse auf der x-Achse und die große Halbachse auf der y-Achse liegt.

(a) Ist g konservativ?

(b) Geben Sie eine doppelpunktfreie Parametrisierung von E an.

(c) Bestimmen Sie Zirkulation $Z(g,E)$ und Ausfluss $A(g,E)$.

Aufgabe H 133. *Länge von Kurven*

Bestimmen Sie die Längen der durch die folgenden Funktionen parametrisierten Kurven:

(a) $\gamma\colon [-2,2] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(0, \ln(1+t^2)\right)^\intercal$.

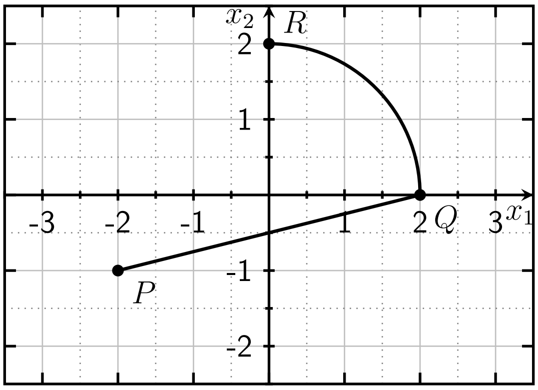
(b) $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \left(\cos(\exp(-t)), \sin(\exp(-t))\right)^\intercal$.

(c) $\gamma\colon [-2,0] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(10t, 4t^2, -3t^2\right)^\intercal$.

(d) $\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(1/2(t+\cos(t)\sin(t)), \frac{1}{2}\left(\sin(t)\right)^2, 1-\cos(t)\right)^\intercal$.

Aufgabe H 134. *Kurvenintegrale und Potentiale*

Es sei K die Kurve, die aus der Strecke von P nach Q und dem Kreisbogen von Q nach R (mit Mittelpunkt im Ursprung) besteht. Weiter sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.



(a) Geben Sie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_1 der Strecke von P nach Q sowie eine reguläre, doppelpunktfreie Parametrisierung C_2 des Kreisbogens von Q nach R an.

(b) Geben Sie $C_1'(t)$ und $C_2'(t)$ an.

(c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s$.

(d) Bestimmen Sie ein Potential U von ∇f mit $U(0) = 42$.

(e) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Aufgabe H 135. *Kurvenintegrale und Potentiale II*

Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 x_1^2 x_3 \\ 8x_3^2 \\ 3x_1^3 + b^4 x_2 x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix, die Divergenz und die Rotation von f.

(b) Für welche Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f ein Potential?

(c) Berechnen Sie ein Potential von f für $(a, b) = (3, 2)$.

(d) Sei K die durch $C : [1, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix}$ parametrisierte Kurve. Berechnen Sie für $(a, b) = (3, 2)$ das Integral $\displaystyle\int_K f(x) \bullet \mathrm{d}\,x$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 136. *Taylorpolynome*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \dfrac{1}{2 + \cos(x)}$.

Bestimmen Sie $T_2(f, x, 0)$ und $R_2(f, x, 0)$.