A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

1. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 1. *Vereinfachen*

Seien $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2$ und $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq -b$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

(a) $\dfrac{\frac{3}{2(3^2-3)} + \frac{1}{6}}{\frac{6+2}{3^2} + 1 - \frac{2^2}{3^2-1}}$

(b) $\dfrac{\binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + 0!}$

(c) $\dfrac{a^4 + 2b(b(b(b+2a) + 3a^2) + 2a^3) - b^4}{a(a^2 + b(3a+1)) - b(a(1-3b) - b^2)}$

(d) $\sqrt{28^2(n-1) + (\sqrt{14})^4(n-2)^2}$

Lösungshinweise hierzu:

(a)

$$\frac{\frac{3}{2(3^2-3)} + \frac{1}{6}}{\frac{6+2}{3^2} + 1 - \frac{2^2}{3^2-1}} = \frac{\frac{1}{2(3-1)} + \frac{1}{6}}{\frac{8}{9} + 1 - \frac{4}{8}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{8}{9} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3+2}{12}}{\frac{16+9}{18}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{25}{18}} = \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 25} = \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} &= \frac{8!}{4!4!} + \frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} \\
&= \frac{7!}{4!}\left(\frac{8}{4!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) \\
&= \frac{7!}{4!3!}\left(\frac{8}{4} + 2\right) \\
&= \frac{7! \cdot 4}{3! \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{7!}{3!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140.
\end{aligned}$$

Schließlich ist $\sin(\frac{\pi}{2}) + 0! = 1 + 1 = 2$, daher ist $\dfrac{\binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3}}{\sin(\frac{\pi}{2}) + 0!} = \frac{140}{2} = 70.$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{a^4 + 2b(b(b(b+2a) + 3a^2) + 2a^3) - b^4}{a(a^2 + b(3a+1)) - b(a(1-3b) - b^2)} &= \frac{a^4 + 2b(b(b^2 + 2ab) + 3a^2b) + 4a^3b - b^4}{a(a^2 + 3ab + b) - b(a - 3ab - b^2)} \\
&= \frac{a^4 + 2b(b^3 + 2ab^2 + 3a^2b) + 4a^3b - b^4}{a^3 + 3a^2b + ab - (ab - 3ab^2 - b^3)} \\
&= \frac{a^4 + 2b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b - b^4}{a^3 + 3a^2b + ab - ab + 3ab^2 + b^3} \\
&= \frac{a^4 + b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \\
&= \frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{(a+b)^3} \\
&= \frac{(a+b)^4}{(a+b)^3} = a + b.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\sqrt{28^2(n-1)+\sqrt{14}^4(n-2)^2} &= \sqrt{2^2 14^2(n-1)+14^2(n-2)^2}\\ &= \sqrt{14^2(4(n-1)+(n-2)^2)}\\ &= 14\sqrt{4n-4+n^2-4n+4} = 14\sqrt{n^2} = 14n.\end{aligned}$$

Aufgabe H 2. *Teleskopsummen*
Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\sum_{n=-4}^{4} 35\cdot 6^{2n}$. **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k}$.

Berechnen Sie (b) für $n = 143$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $35\cdot 6^{2n} = (36-1)36^n = 36^{n+1} - 36^n$. Sei $a_k = 36^{k-5}$. Mit Hilfe der Aufgabe P3 folgt

$$\sum_{n=-4}^{4} 35\cdot 6^{2n} = \sum_{n=-4}^{4} 36^{n+1} - 36^n = \sum_{k=1}^{9} 36^{k-4} - 36^{k-5} = a_{10} - a_1 = 36^5 - 36^{-4} = 6^{10} - \frac{1}{6^8}.$$

(b) Es ist:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-(1+k))!}\frac{\sqrt{k+1}}{k+1} - \binom{n+1}{k}\sqrt{k}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(1+k))!}\sqrt{k+1} - \binom{n+1}{k}\sqrt{k}\\ &= \binom{n+1}{k+1}\sqrt{k+1} - \binom{n+1}{k}\sqrt{k}.\end{aligned}$$

Sei $a_k := \binom{n+1}{k}\sqrt{k}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$$

und mit Hilfe der Aufgabe P3 (mit $s = 1$) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{n+1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\binom{n+1}{k} = a_{n+1} - a_1 &= \binom{n+1}{n+1}\sqrt{n+1} - \binom{n+1}{1}\sqrt{1}\\ &= \sqrt{n+1} - (n+1).\end{aligned}$$

Für $n = 143$ ist die Summe daher gleich $\sqrt{144} - 144 = 12 - 144 = -132$.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Produkten*

Analog zur Summenschreibweise führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{i=1}^{n} A_i$ bedeutet, dass man den Term A_i für alle i von 1 bis n auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\displaystyle\prod_{j=2}^{m} \frac{j-1}{j^3-2j^2+j} = \frac{m}{(m!)^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqq 2$.

(b) $\prod_{k=3}^{n} \left(1-\frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{2}{n(n-1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst bemerken wir, dass der Ausdruck neben dem Produktsymbol vereinfacht werden kann:

$$\frac{j-1}{j^3-2j^2+j} = \frac{j-1}{j(j-1)^2} = \frac{1}{j(j-1)}.$$

IA Wir zeigen die Aussage für $m = 2$: Es ist

$$\prod_{j=2}^{2} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{2\cdot(2-1)} = \frac{1}{2} = \frac{2}{(2!)^2}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqq 2$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{j=2}^{m} \frac{j-1}{j^3-2j^2+j} = \prod_{j=2}^{m} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{m}{(m!)^2}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $m+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für m:

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{m+1} \frac{1}{j(j-1)} &= \frac{1}{(m+1)m} \prod_{j=2}^{m} \frac{1}{j(j-1)} \\ &\overset{\text{IH}}{=} \frac{1}{(m+1)m} \frac{m}{(m!)^2} \\ &= \frac{1}{(m+1)(m!)^2} = \frac{m+1}{((m+1)!)^2}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqq 2$ bewiesen.

(b) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 3$: Es ist

$$\begin{aligned}\prod_{k=3}^{3} \left(1-\frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right) &= \left(1-\frac{2}{3}\right) \sin\left(\left(6+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \\ &= \frac{1}{3}\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3\cdot(3-1)}.\end{aligned}$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=3}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
&\qquad = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sin\left(\left(2(n+1) + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \sin\left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \\
&\qquad \overset{\text{IH}}{=} \frac{n-1}{n+1} \sin\left(2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{2}{n(n-1)} \\
&\qquad = \frac{2}{(n+1)n} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{(n+1)((n+1)-1)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 3$ bewiesen.

Alternativ: Man beachtet, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ gleich $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ist, dann beweist man $\prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{2}{k}\right) = \frac{2}{n(n-1)}$ durch vollständige Induktion.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Ungleichungen*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) $\dfrac{n!}{4} > \dfrac{2^n}{(n+2)(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$.

(b) $a^n - 2^n \geqq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} 2^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geqq 3$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 2$: Es ist

$$\frac{2!}{4} = \frac{1}{2} > \frac{2^2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ gilt, d.h., es ist

$$\frac{n!}{4} > \frac{2^n}{(n+2)(n+1)}.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\frac{(n+1)!}{4} = \frac{1}{4}(n+1)n! \overset{\text{IH}}{>} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2^n}{n+2} > \frac{2^{n+1}}{(n+3)(n+2)}.$$

Die letzte Ungleichung gilt, wegen $\dfrac{2^{n+1}}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{2^n}{n+2}\dfrac{2}{n+3}$ und $\dfrac{2}{n+3} < 1$.
Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 2$ bewiesen.

(b) **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 1$: Wegen $a \geqq 3$ gilt

$$a - 2 \geqq a^0 2^0 = 1.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist

$$a^n - 2^n \geqq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} 2^k.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} a \cdot a^{n-1-k} 2^k + a^0 2^n = 2^n + a \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} 2^k &\overset{\text{IH}}{\leqq} 2^n + a(a^n - 2^n) \\ &= a^{n+1} - 2^n \underbrace{(a-1)}_{\geqq 2} \\ &\leqq a^{n+1} - 2^{n+1}.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 5. *Skizzen von Funktionsgraphen*

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(\frac{3x}{2})$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}\cos(3x)$

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{2}\cos(3x)\cos(\frac{3x}{2})$

Hinweis: Eine solche Skizze beinhaltet immer eine Achsenbeschriftung mit Pfeilen und eine sinnvolle Achsenskalierung. Wir erwarten von Hand gefertigte Skizzen.

Lösungshinweise hierzu: