A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

2. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 6. *Polynome, Binomischer Lehrsatz*

(a) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(x^4+2)(x^3-9x^2+27x-27)$.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^4-20x^2+5=4x^2+30$.

(c) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Ungleichung $(x^2+8x+16)(4x^2+4x-3)<0$.

(d) Zeigen Sie, dass $2x^{1984}+3x^2-30x+81$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach dem Satz vom Nullprodukt genügt es, die beiden Faktoren getrennt zu untersuchen. Der zweite Faktor lässt sich mit dem Binomischen Lehrsatz schreiben als

$$x^3-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

Wir erhalten also 3 als einzige Nullstelle des ersten Faktors.
Der verbleibende Faktor x^4+1 besitzt hingegen keine reelle Nullstellen: In der Tat gilt für $x\in\mathbb{R}$ stets $x^4\geqq 0$ und somit $x^4+2\geqq 2>0$. Somit ist 3 die einzige reelle Nullstelle von $(x^4+2)(x^3-9x^2+27x-27)$.

(b) Die Gleichung $x^4-20x^2+5=4x^2+30$ ist äquivalent zu der Gleichung $x^4-24x^2-25=0$. Diese Gleichung lässt sich schreiben als $(x^2-25)(x^2+1)=(x-5)(x+5)(x^2+1)=0$. Der Faktor x^2+1 hat keine reellen Nullstellen. Daher hat die Gleichung $x^4-3x^2+4=3x^2-1$ nur zwei reelle Lösungen: $x=-5$ und $x=5$.

(c) Es ist $(x^2+8x+16)(4x^2+4x-3)=(x+4)^2(2x-1)(2x+3)$. Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist $(x+4)^2$ nicht-negativ, daher sind die reellen Lösungen der Ungleichung $(x+4)^2(2x-1)(2x+3)<0$ genau die Lösungen der Ungleichung $(2x-1)(2x+3)<0$. Als Lösung erhalten wir deshalb $-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$.

(d) Für $x\in\mathbb{R}$ liefert quadratisches Ergänzen die Ungleichung

$$2x^{1984}+3x^2-30x+81=\underbrace{2x^{1984}}_{\geqq 0}+\underbrace{3(x-5)^2}_{\geqq 0}+6\geqq 6>0.$$

Somit besitzt $2x^{1984}+3x^2-30x+81$ keine reellen Nullstellen.

Aufgabe H 7. *Ungleichungen und Beiträge*

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller reellen Zahlen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

(a) $-2|x-2|<x^2(x-2)$

(b) $\dfrac{x^2-2x-2}{3x^2+4x-4}\leqq\dfrac{1}{3}$

(c) $|x^2+2x-3|+1>|x+3|+|x-1|$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $x = 2$ ist die Ungleichung nicht erfüllt. Es bleiben noch die folgenden zwei Fälle zu betrachten:

1. Fall: $x < 2$: In diesem Fall ist $|x-2| = 2-x > 0$ und daher

$$-2|x-2| = -2(2-x) < x^2(x-2) \iff 2 > x^2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

2. Fall: $x > 2$: In diesem Fall ist $|x-2| = x-2 > 0$ und daher

$$-2|x-2| = -2(x-2) < x^2(x-2) \iff -2 < x^2.$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, da $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Wir erhalten insgesamt, dass die Ungleichung erfüllt ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ oder $x > 2$ erfüllen. Also für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (2, \infty)$ ist die Ungleichung erfüllt.

(b) Die Nullstellen von $3x^2 + 4x - 4$ sind $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = -2$, da $3x^2 + 4x - 4 = (3x-2)(x+2)$ ist. Für diese beiden Punkte ist die linke Seite der Ungleichung nicht definiert und wir betrachten die übrigen reellen Zahlen.

1. Fall: $x < -2$: In diesem Fall gilt $\underbrace{(3x-2)}_{<0}\underbrace{(x+2)}_{<0} > 0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-2}{3x^2+4x-4} \leqq \frac{1}{3} &\iff x^2 - 2x - 2 \leqq \frac{1}{3}(3x^2+4x-4)\\ &\iff -6x - 6 \leqq 4x - 4\\ &\iff 10x \geqq -2\\ &\iff x \geqq -\frac{1}{5} > -2.\end{aligned}$$

Deshalb gibt es in diesem Fall keine Lösung.

2. Fall: $-2 < x < \frac{2}{3}$: In diesem Fall gilt $\underbrace{(3x-2)}_{<0}\underbrace{(x+2)}_{>0} < 0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-2}{3x^2+4x-4} \leqq \frac{1}{3} &\iff x^2 - 2x - 2 \geqq \frac{1}{3}(3x^2+4x-4)\\ &\iff -6x - 6 \geqq 4x - 4\\ &\iff 10x \leqq -2\\ &\iff x \leqq -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir deshalb $-2 < x \leqq -\frac{1}{5}$.

1. Fall: $x > \frac{2}{3}$: In diesem Fall gilt $\underbrace{(3x-2)}_{>0}\underbrace{(x+2)}_{>0} > 0$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-2}{3x^2+4x-4} \leqq \frac{1}{3} &\iff x^2 - 2x - 2 \leqq \frac{1}{3}(3x^2+4x-4)\\ &\iff x \geqq -\frac{1}{5} < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

In diesem Fall erhalten wir $x > \frac{2}{3}$.
Wir erhalten insgesamt, dass die Ungleichung erfüllt ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die $-2 < x \leqq -\frac{1}{5}$ oder $x > \frac{2}{3}$ erfüllen. Also für alle $x \in (-2, -\frac{1}{5}] \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ ist die Ungleichung erfüllt.

(c) Die Nullstellen von $x^2 + 2x - 3$ sind -3 und 1, wobei $x^2 + 2x - 3$ für $-3 < x < 1$ negativ ist. Für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + 2x - 3$ positiv oder gleich Null.
1. Fall: $x < -3$:

$$\begin{aligned} |x^2 + 2x - 3| + 1 > |x + 3| + |x - 1| &\iff x^2 + 2x - 3 + 1 > -(x + 3) - (x - 1) \\ &\iff x^2 + 2x - 2 > -x - 3 - x + 1 \\ &\iff x^2 + 4x > 0 \\ &\iff x(x + 4) > 0 \\ &\iff (x < -4) \vee (x > 0). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir in diesem Fall $x < -4$.
2. Fall: $x = -3$:

$$|x^2 + 2x - 3| + 1 > |x + 3| + |x - 1| \iff 0 + 1 > 0 + |-4| \iff 1 > 4.$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist die Ungleichung für $x = -3$ nicht erfüllt.
3. Fall: $-3 < x < 1$:

$$\begin{aligned} |x^2 + 2x - 3| + 1 > |x + 3| + |x - 1| &\iff -(x^2 + 2x - 3) + 1 > x + 3 - (x - 1) \\ &\iff -x^2 - 2x + 3 + 1 > x + 3 - x + 1 \\ &\iff -x^2 - 2x > 0 \\ &\iff -x(x + 2) > 0 \\ &\iff -2 < x < 0. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir in diesem Fall $-2 < x < 0$.
4. Fall: $x = 1$:

$$|x^2 + 2x - 3| + 1 > |x + 3| + |x - 1| \iff 0 + 1 > 4 + 0 \iff 1 > 4.$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist die Ungleichung für $x = 1$ nicht erfüllt.
5. Fall: $x > 1$:

$$\begin{aligned} |x^2 + 2x - 3| + 1 > |x + 3| + |x - 1| &\iff x^2 + 2x - 3 + 1 > x + 3 + x - 1 \\ &\iff x^2 + 2x - 2 > 2x + 2 \\ &\iff x^2 - 4 > 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 2) > 0 \\ &\iff (x < -2) \vee (x > 2). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir in diesem Fall $x > 2$.
Wir erhalten insgesamt, dass die Ungleichung erfüllt ist für alle $x \in \mathbb{R}$, die $x < -4$ oder $-2 < x < 0$ oder $x > 2$ erfüllen. Also für alle $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 0) \cup (2, \infty)$ ist die Ungleichung erfüllt.

Aufgabe H 8. *Mengen*

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

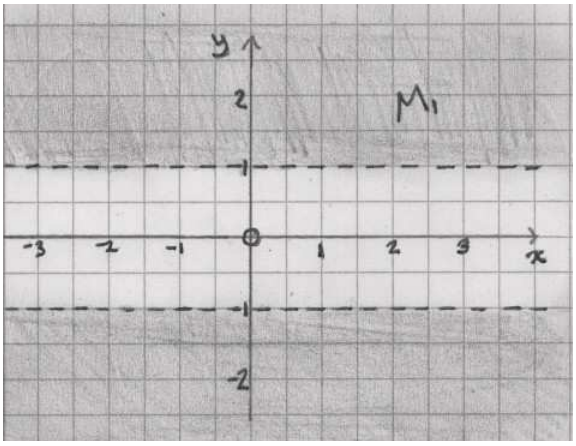
$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > 1\}, & M_3 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 9\}, \\ M_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 2 > -3x\}, & M_4 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - y \leqq 1) \vee (y + x^2 \leqq 1)\}. \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Schnittmenge $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

Lösungshinweise hierzu:

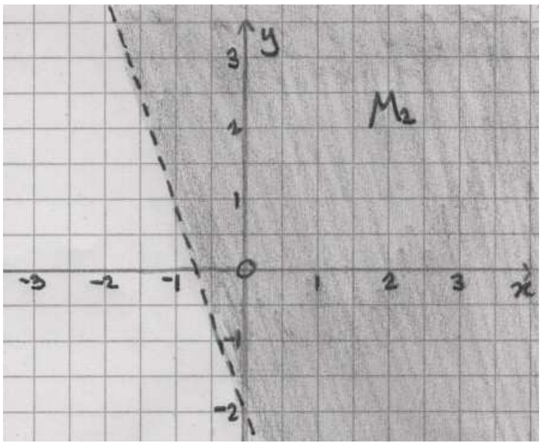
(a) M_1 : $|y| > 1 \iff (y < -1) \vee (y > 1)$

Die Menge M_1 ist $\mathbb{R}^2$ ohne den Streifen, wobei der Rand $y = \pm 1$ nicht zu der Menge gehört.

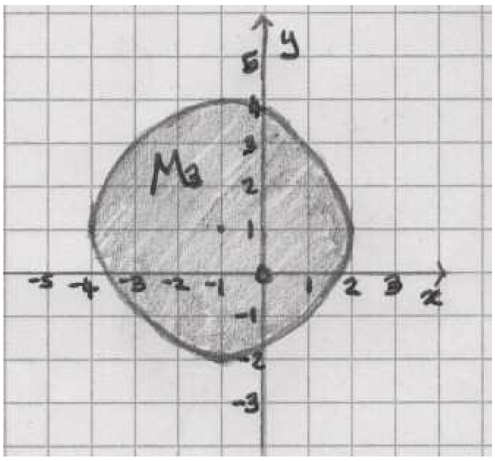


M_2 : $y + 2 > -3x \iff y > -2 - 3x$

M_2 ist die graue Halbebene, wobei die Gerade $y = -3x - 2$ nicht zu der Menge gehört.

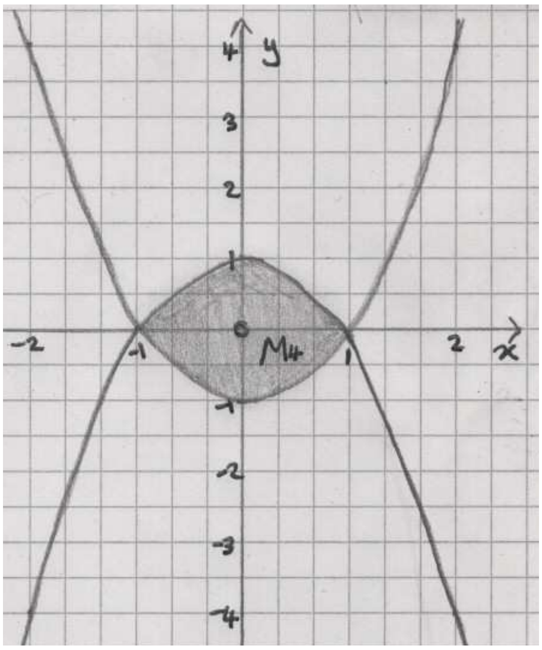


Die Menge M_3 ist eine Kreisscheibe mit Radius 3 und dem Mittelpunkt $(-1, 1)$, wobei der Rand Bestandteil der Menge ist.

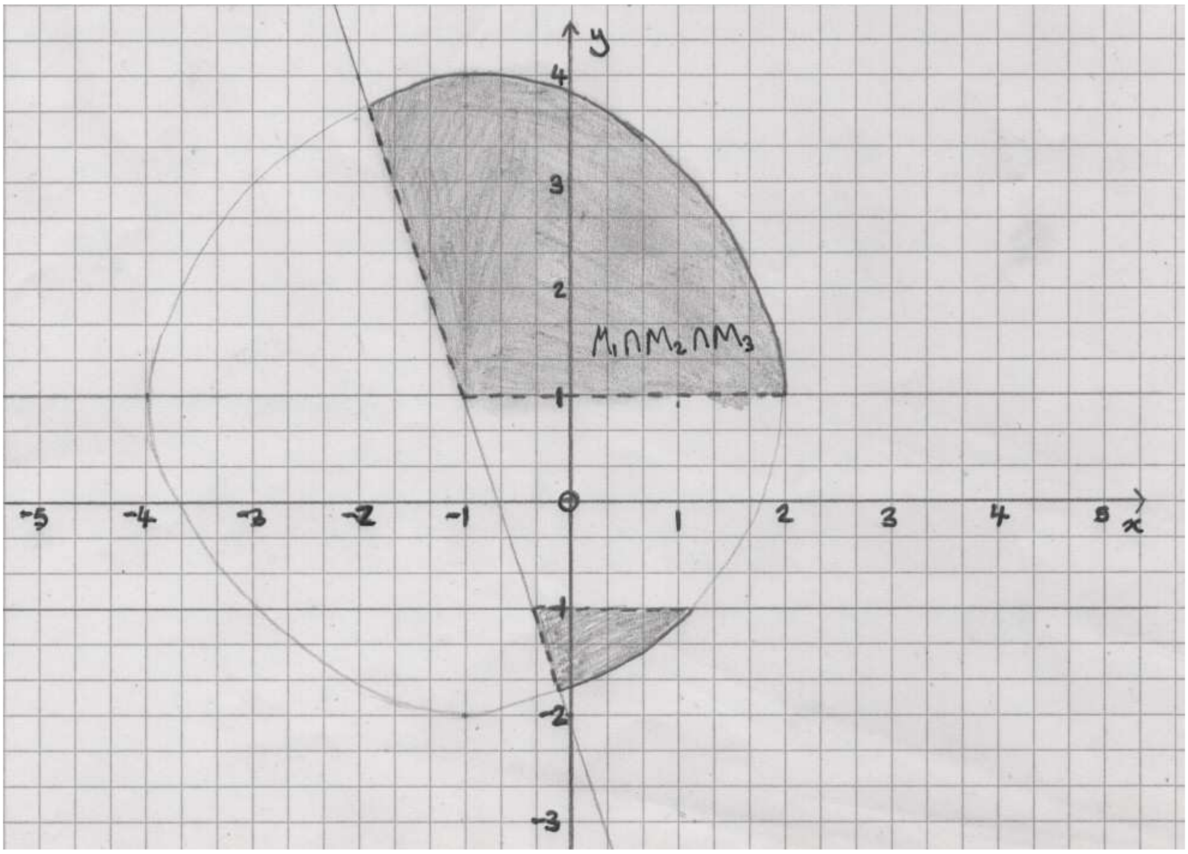


M_4 : $(x^2 - y \leqq 1) \iff y \geqq x^2 - 1$ und $(y + x^2 \leqq 1) \iff y \leqq -x^2 + 1$.

Die Menge M_4 ist die Fläche zwischen die Parabeln $y = x^2 - 1$ und $y = -x^2 + 1$.



(b) Wir müssen nur die Menge zeichnen, die von jeder der Mengen M_1, M_2 und M_3 abgedeckt wird.



Aufgabe H 9. *Ungleichungen*

(a) Für welche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $(5x + y^3 + 2z^2)^2 \leqq 30(x^2 + y^6 + z^4)$?
Hinweis: Schwarzsche Ungleichung.

(b) Zeigen Sie, dass $2xy \leqq (x+y)\sqrt{xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ gilt.

(c) Seien $y_1, y_2, \ldots$ positive reelle Zahlen und sei $\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $y_{N+1}(\mu_N)^N \leqq (\mu_{N+1})^{N+1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung mit $n = N+1$ und $x = \frac{\mu_{N+1}}{\mu_N} - 1$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Schwarzsche Ungleichung 1.5.11 lautet

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)$$

für beliebige Zahlen $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $n = 3$ und $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ sowie $b_1 = x$, $b_2 = y^3$, $b_3 = z^2$ liefert, dass für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$(5x + y^3 + 2z^2)^2 \leqq (5^2 + 1^2 + 2^2)(x^2 + y^6 + z^4) = 30(x^2 + y^6 + z^4)$$

erfüllt ist. Also gilt die Ungleichung für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung trivial. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ benutzen wir die Monotonie des Quadrierens (1.5.7):

$$\begin{aligned} 2xy \leqq (x+y)\sqrt{xy} &\iff 4x^2y^2 \leqq (x+y)^2(xy) \\ &\iff 4xy \leqq (x^2 + 2xy + y^2) \\ &\iff 0 \leqq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\iff 0 \leqq (x-y)^2. \end{aligned}$$

Da $0 \leqq (x-y)^2$ eine wahre Aussage darstellt, haben wir die Ungleichung bewiesen.

(c) Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Bernoullische Ungleichung mit der in dem Hinweis angegebenen Wahl für x und n, um die Ungleichung umzustellen.

$$\begin{aligned} 1 + (N+1)\left(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N} - 1\right) &\leqq \left(1 + \frac{\mu_{N+1}}{\mu_N} - 1\right)^{N+1} \\ &\iff (N+1)\left(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N}\right) - N \leqq \left(\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N}\right)^{N+1} \\ \text{(da } \mu_n > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist)} \qquad &\iff (N+1)\mu_{N+1}(\mu_N)^N - N(\mu_N)^{N+1} \leqq (\mu_{N+1})^{N+1} \\ &\iff (\mu_N)^N\left((N+1)\mu_{N+1} - N(\mu_N)\right) \leqq (\mu_{N+1})^{N+1} \\ &\iff (\mu_N)^N\left(\sum_{j=1}^{N+1} y_j - \sum_{j=1}^{N} y_j\right) \leqq (\mu_{N+1})^{N+1} \\ &\iff (\mu_N)^N y_{N+1} \leqq (\mu_{N+1})^{N+1}. \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 10. *Vollständige Induktion*

Zeigen Sie die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)\cos(2^n x)}{2^n \sin(x)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Hinweis: Dabei dürfen Sie die folgende Gleichung, die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ohne Beweis benutzen: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Lösungshinweise hierzu:

IA Wir zeigen die Aussage für $n = 0$: Es ist

$$\prod_{k=0}^{0} \cos(2^k x) = \cos(2^0 x) = \cos(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(2^0 x)\cos(2^0 x)}{2^0 \sin(x)}.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, d.h., es ist

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)\cos(2^n x)}{2^n \sin(x)}.$$

IS

Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1} \cos(2^k x) &= \cos(2^{n+1} x) \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) \\
&\overset{\text{IH}}{=} \cos(2^{n+1} x) \frac{\sin(2^n x)\cos(2^n x)}{2^n \sin(x)} \\
&= \cos(2^{n+1} x) \frac{\frac{1}{2}\sin(2 \cdot 2^n x)}{2^n \sin(x)} \qquad (\star) \\
&= \cos(2^{n+1} x) \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2 \cdot 2^n \sin(x)} \\
&= \frac{\cos(2^{n+1} x)\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin(x)}.
\end{aligned}$$

$(\star)$ Mit Hilfe des Hinweises bemerken wir, dass

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \iff \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.