Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 11. *Abbildungen*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon x \mapsto (-3\cos(5x), 2\sin(x))$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto -7x^5 + 3$

(c) $h\colon [1,2] \to [0,51]\colon x \mapsto (x^3-1)^2 + 1$

(d) $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (3x-y, 2x+2y)$

Lösungshinweise hierzu:

(a) f ist nicht injektiv, weil (z.B.) $f(0) = (-3,0) = f(2\pi)$.
Weil $|\cos(x)| \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt (z.B.), dass es keine reelle Zahl x gibt mit $f(x) = (-4,0)$, und deshalb ist f nicht surjektiv.
Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn es injektiv sowohl als auch surjektiv ist. Es folgt damit, dass f nicht bijektiv ist.

(b) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -7x_1^5 + 3 = -7x_2^5 + 3 &\implies -7x_1^5 = -7x_2^5 \\ &\implies x_1^5 = x_2^5 \qquad \implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

und deshalb ist g injektiv. Sei weiter $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt, für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} y = -7x^5 + 3 &\iff \frac{3-y}{7} = x^5 \\ &\iff \sqrt[5]{\frac{3-y}{7}} = x. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $g(\sqrt[5]{\frac{3-x}{7}}) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und deshalb ist g surjektiv. Weil g injektiv sowohl als auch surjektiv ist, ist es auch bijektiv.

(c) Für $1 \leqq x_1 < x_2 \leqq 2$ gilt $0 \leqq (x_1^3 - 1) < (x_2^3 - 1)$ und damit wegen der Monotonie des Quadrierens 1.5.7

$$h(x_1) = (x_1^3 - 1)^2 + 1 < (x_2^3 - 1)^2 + 1 = h(x_2).$$

Also ist h injektiv.
h ist nicht surjektiv. Wegen $h(2) = 50 < 51$ und obiger Überlegung, gibt es kein $x \in [1,2]$ mit $h(x) = 51$.
h ist nicht bijektiv, da nicht surjektiv.

(d) Um die Surjektivität nachzuweisen, sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert mit $u(x,y) = (a,b)$. D.h. wir suchen eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - y &= a \\ 2x + 2y &= b \end{aligned}$$

Dazu lösen wir die erste Gleichung nach y auf und erhalten $y = 3x - a$. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a+b}{8} \\ y &= \frac{3b-2a}{8}. \end{aligned}$$

Für diese Wahl von (x, y) gilt also $u(x, y) = (a, b)$. Da $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig war, ist u surjektiv. Für die Untersuchung auf Injektivität nehmen wir an, dass

$$u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Obige Umformung zeigt, dass dann

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2a+b}{8} \\ y_1 &= \frac{3b-2a}{8}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2a+b}{8} \\ y_2 &= \frac{3b-2a}{8}. \end{aligned}$$

gelten muss. Also ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; die Abbildung ist also injektiv. Bijektivität: Da u injektiv und surjektiv ist, ist u bijektiv.

Aufgabe H 12. *Abbildungen II*

(a) Finden Sie eine Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

(b) Finden Sie eine Abbildung $f_2 : \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1\} \to \mathbb{Q}$, die injektiv ist. Ist Ihr Beispiel surjektiv?

(c) Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto (x-2)^2 \qquad \text{und} \qquad g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax - 2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Menge der $a \in \mathbb{R}$, die $f(x) > g_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.
Hinweis: Sei $b, c \in \mathbb{R}$. Es gilt $x^2 + bx + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn $b^2 - 4c < 0$ ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+ : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

Es ist $f_1(-x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = f_1(x, y)$ und damit ist f_1 nicht injektiv.

Nun zeigen wir, dass f_1 surjektiv ist. Sei dazu $r \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Dann gilt für jeden Punkt (x, y) auf dem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r auch $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$. Damit ist die Abbildung surjektiv.

(b) Die Abbildung $f_2 : \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1\} \to \mathbb{Q} : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

Zuerst zeigen wir, dass f_2 injektiv ist. Seien dazu $x, y \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1\}$ mit $f_2(x) = f_2(y)$ beliebig. Dann gilt $x(y+1) = xy + x = xy + y = y(x+1)$ und somit $x = y$.

Nun zeigen wir, dass f_2 nicht surjektiv ist. Es gibt z.B. kein x so dass $f_2(x) = \alpha \in \mathbb{Q}$, wobei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Um das zu zeigen, nehmen wir an, dass $f(x) = \frac{x}{x+1} = \alpha$.
Im Fall $x < -1$:

$$\frac{x}{x+1} = \alpha < \frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{2}(x+1) \iff x > 1.$$

Diese Aussage steht im Widerspruch zu $x < -1$.
Im Fall $x > -1$:

$$\frac{x}{x+1} = \alpha < \frac{1}{2} \iff x < \frac{1}{2}(x+1) \iff x < 1$$

und

$$\frac{x}{x+1} = \alpha > 0 \iff x > 0.$$

Also muss $x \in (0,1)$ sein. Daher gibt es kein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $f(x) = \alpha$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist es

$$(x-2)^2 > ax - 2 \iff x^2 - 4x + 4 > ax - 2 \iff x^2 - (4+a)x + 6 > 0.$$

Es gilt $x^2 - (4+a)x + 6 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn $(-(4+a))^2 - 4 \cdot 6 < 0$ ist. Also

$$\begin{aligned}(-(4+a))^2 - 4 \cdot 6 < 0 &\iff (4+a)^2 < 24 \\ &\iff -\sqrt{24} < 4 + a < \sqrt{24} \\ &\iff -4 - 2\sqrt{6} < a < -4 + 2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung $f(x) > g_a(x)$ ist für beliebig

$$a \in \{a \in \mathbb{R} | -4 - 2\sqrt{6} < a < -4 + 2\sqrt{6}\}$$

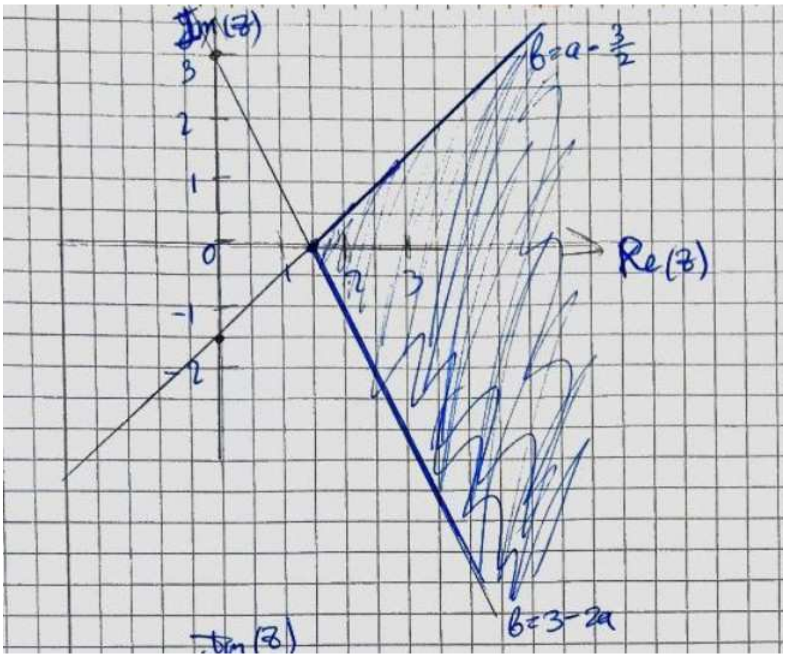
für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Aufgabe H 13. *Komplexe Zahlenebene*
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

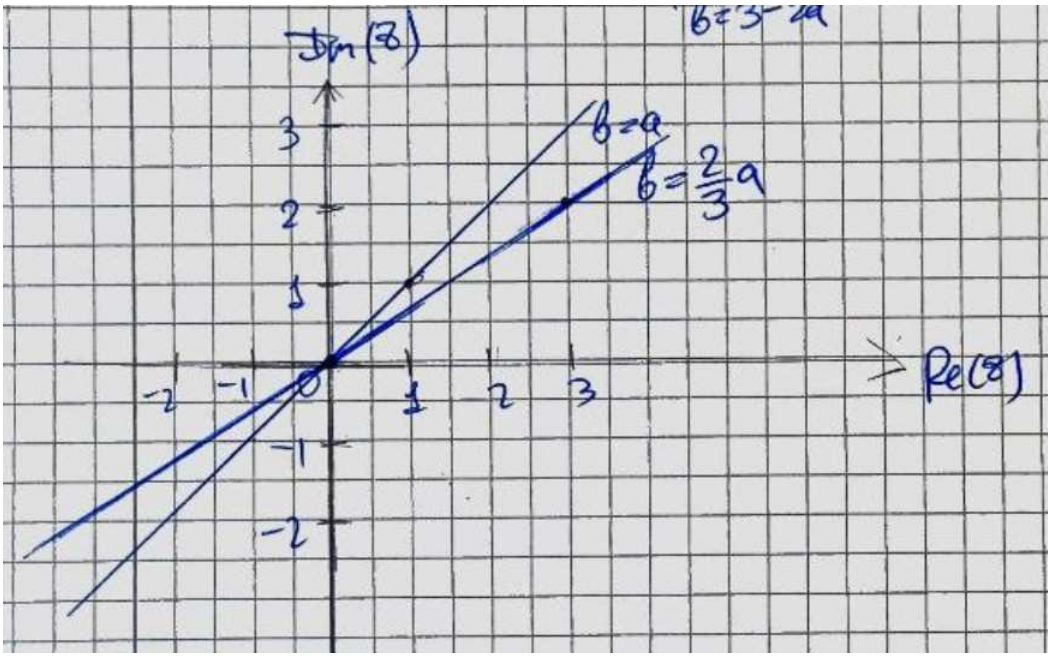
$$\begin{aligned}
A &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\operatorname{Re}(z+\bar{z}) - \operatorname{Im}(\bar{z}) \geqq 3) \wedge (\operatorname{Re}(z+\bar{z}) - \operatorname{Im}(z-\bar{z}) \geqq 3) \right\} \\
B &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \tfrac{5}{2}\operatorname{Im}(z^2) - 3\operatorname{Re}(z)^2 = 2\operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Re}(z^2) \right\} \\
C &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (4\operatorname{Re}(z) + 5\operatorname{Im}(z) < 15) \wedge (3\operatorname{Re}(z) - 7\operatorname{Im}(z) > 22) \wedge (7\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Im}(z) < 6) \right\} \\
D &:= \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3|\operatorname{Re}(z)| + 4|\operatorname{Im}(z)| \geqq 5 \right\}.
\end{aligned}$$

Lösungshinweise hierzu:

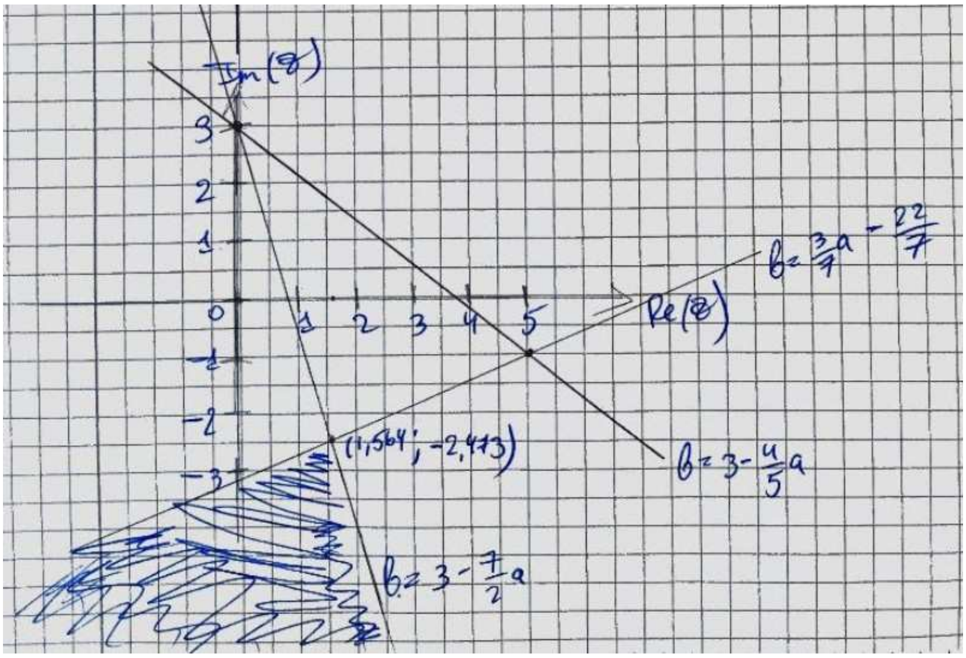
(a) Es ist $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (\mathrm{Re}(z+\bar{z}) - \mathrm{Im}(\bar{z}) \geqq 3) \wedge (\mathrm{Re}(z+\bar{z}) - \mathrm{Im}(z-\bar{z}) \geqq 3) \right\}$. Sei $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$,
dann $\mathrm{Re}(\bar{z}) = a$ und $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -b$.
$\mathrm{Re}(z+\bar{z}) - \mathrm{Im}(\bar{z}) = 2a + b \geqq 3 \Leftrightarrow b \geqq 3 - 2a$.
$\mathrm{Re}(z+\bar{z}) - \mathrm{Im}(z - \bar{z} = 2a - 2b \geqq 3 \Leftrightarrow a - b \geqq \frac{3}{2} \Leftrightarrow b \leqq a - \frac{3}{2}$.
Damit wird die Menge nach unten durch die Gerade $b = 3 - 2a$ und nach oben durch die Gerade $b = a - \frac{3}{2}$ begrenzt, dabei ist der Rand der Fläche auch ein Teil der Menge.



(b) Es ist $B := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{5}{2}\mathrm{Im}(z^2) - 3\,\mathrm{Re}(z)^2 = 2\,\mathrm{Im}(z)^2 - \mathrm{Re}(z^2) \right\}$. Sei $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$,
dann $z^2 = (a+b\mathrm{i})^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = (a^2 - b^2)$ und $\mathrm{Im}(z^2) = 2ab$.
$5ab - 3a^2 = 2b^2 - a^2 + b^2 \Leftrightarrow 5ab - 3a^2 = 3b^2 - a^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 5ab + 2a^2 = 0$
$D = 25a^2 - 24a^2 = a^2 \Leftrightarrow b = \frac{5a+a}{6} = a$ und $b = \frac{5a-a}{6} = \frac{4}{6}a = \frac{2}{3}a$. Damit ist die Menge die Geraden $b = a$ und $b = \frac{2}{3}a$.

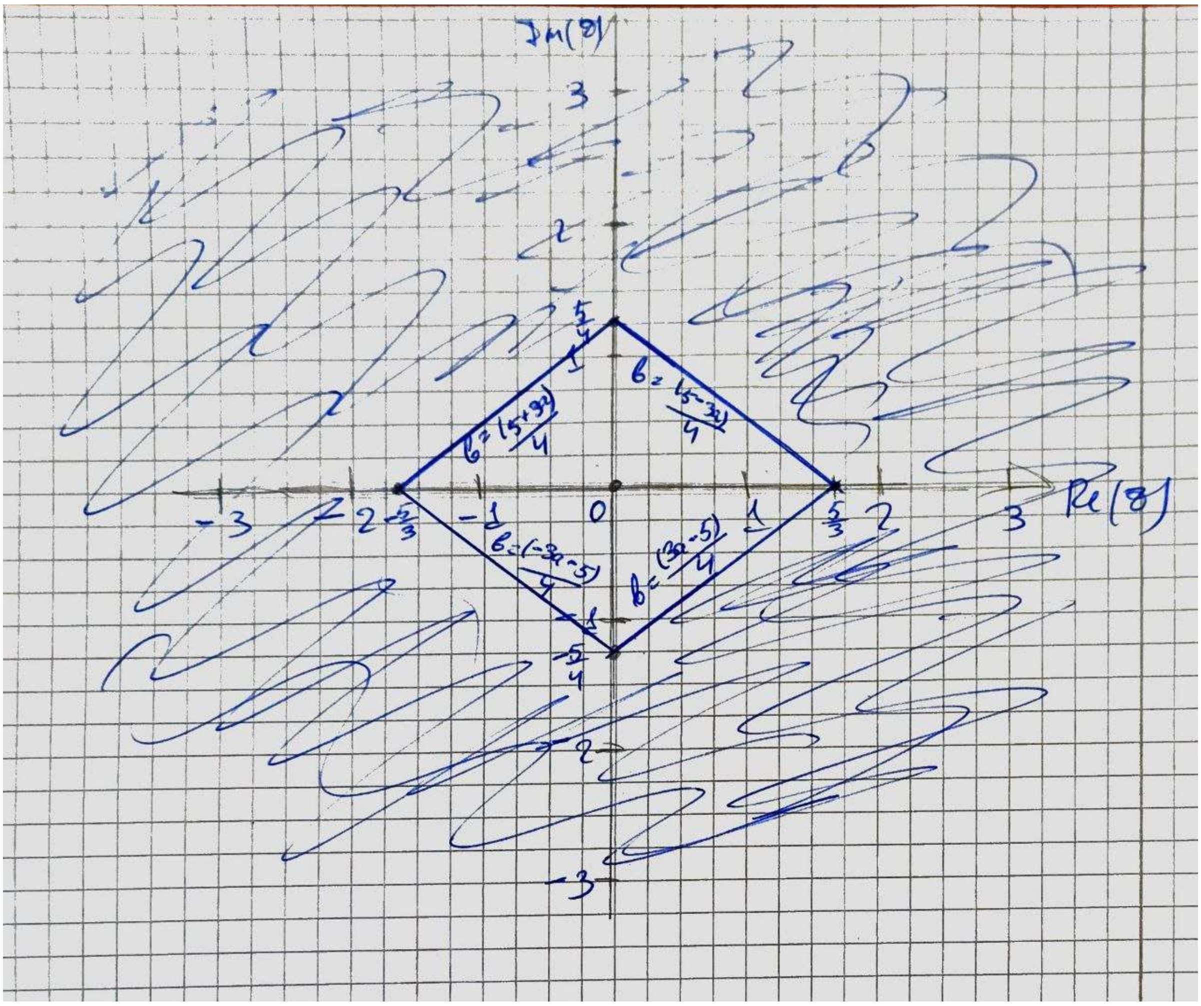


(c) Sei $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$.
$4a + 5b < 15 \Leftrightarrow b < 3 - \frac{4}{5}a$
$3a - 7b > 22 \Leftrightarrow b < \frac{3}{7}a - \frac{22}{7}$
$7a + 2b < 6 \Leftrightarrow b < 3 - \frac{7}{2}a$
Damit wird die Menge nach oben durch die Geraden $b = \frac{3}{7}a - \frac{22}{7}$ und $b = 3 - \frac{7}{2}a$ begrenzt,
mit der Spitze in $(1.564, -2.473)$. Dabei ist der Rand der Fläche kein Teil der Menge.



(d) Es ist $D := \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 3|\mathrm{Re}(z)| + 4|\mathrm{Im}(z)| \geqq 5\right\}$. Sei $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$. Es sind vier Fälle zu unterscheiden.
Fall $a > 0$, $b > 0$: $3a + 4b \geqq 5 \Leftrightarrow b \geqq \frac{(5-3a)}{4}$.
Fall $a > 0$, $b < 0$: $3a - 4b \geqq 5 \Leftrightarrow b \leqq \frac{(3a-5)}{4}$.
Fall $a < 0$, $b > 0$: $-3a + 4b \geqq 5 \Leftrightarrow b \geqq \frac{(5+3a)}{4}$.

Fall $a < 0,\, b < 0$: $-3a - 4b \geqq 5 \Leftrightarrow b \leqq \frac{(-3a-5)}{4}$.
Damit wird die Menge nach oben durch die Geraden $b = \frac{(3a-5)}{4}$ und $b = \frac{(-3a-5)}{4}$ begrenzt, sowie nach unten durch die Geraden $b = \frac{(5-3a)}{4}$ und $b = \frac{(5+3a)}{4}$, die Spitzen sind $(\frac{5}{3}, 0)$, $(0, \frac{5}{4})$, $(-\frac{5}{3}, 0)$ und $(0, -\frac{5}{4})$. Dabei ist der Rand der Fläche auch ein Teil der Menge.



Aufgabe H 14. *Komplexe Zahlen*

(a) Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\mathrm{Re}((a+b\mathrm{i})^4) = a^4 - 6a^2b^2 + b^4$ und $\mathrm{Im}((a+b\mathrm{i})^4) = 4ab(a^2 - b^2)$.

(b) Skizzieren Sie $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, z^4 und $(\bar{z})^4$ in der komplexen Zahlenebene. Wie ist das Verhältnis zwischen $(\bar{z})^4$ und z^4?

(c) Berechnen Sie den euklidischen Abstand zwischen z und 0 und zwischen z^4 und 0.

(d) Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den folgenden Strecken $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$:

(i) $A = z,\ B = 1$ **(ii)** $A = z^4,\ B = 1$ **(iii)** $A = z^4,\ B = (\bar{z})^4$

Geben Sie diese Winkel sowohl im Bogenmaß als auch im Gradmaß an.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})^4 &= (a^2+2ab\mathrm{i}-b^2)^2\\ &= a^4+2a^3b\mathrm{i}-a^2b^2+2a^3b\mathrm{i}-4a^2b^2-2ab^3\mathrm{i}-a^2b^2-2ab^3\mathrm{i}+b^4\\ &= a^4-6a^2b^2+b^4+4a^3b\mathrm{i}-4ab^3\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Alternativ benutzen wir den Binomischen Lehrsatz:

$$(a+b\mathrm{i})^4 = a^4+4a^3b\mathrm{i}+6a^2b^2\mathrm{i}^2+4a^3b\mathrm{i}+b^4\mathrm{i}^4 = a^4-6a^2b^2+b^4+4a^3b\mathrm{i}-4a^3b\mathrm{i}.$$

Daher ist $\mathrm{Re}((a+b\mathrm{i})^4) = a^4-6a^2b^2+b^4$ und $\mathrm{Im}((a+b\mathrm{i})^4) = 4ab(a^2-b^2)$.

(b) Es ist

$$\mathrm{Re}(z^4) = 1^4-6\cdot 1^2(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^4 = 1-6\cdot 3+3^2 = -8$$

und

$$\mathrm{Im}(z^4) = 4\cdot 1\sqrt{3}(1^2-\sqrt{3}^2) = 4\sqrt{3}\cdot(-2) = -8\sqrt{3}.$$

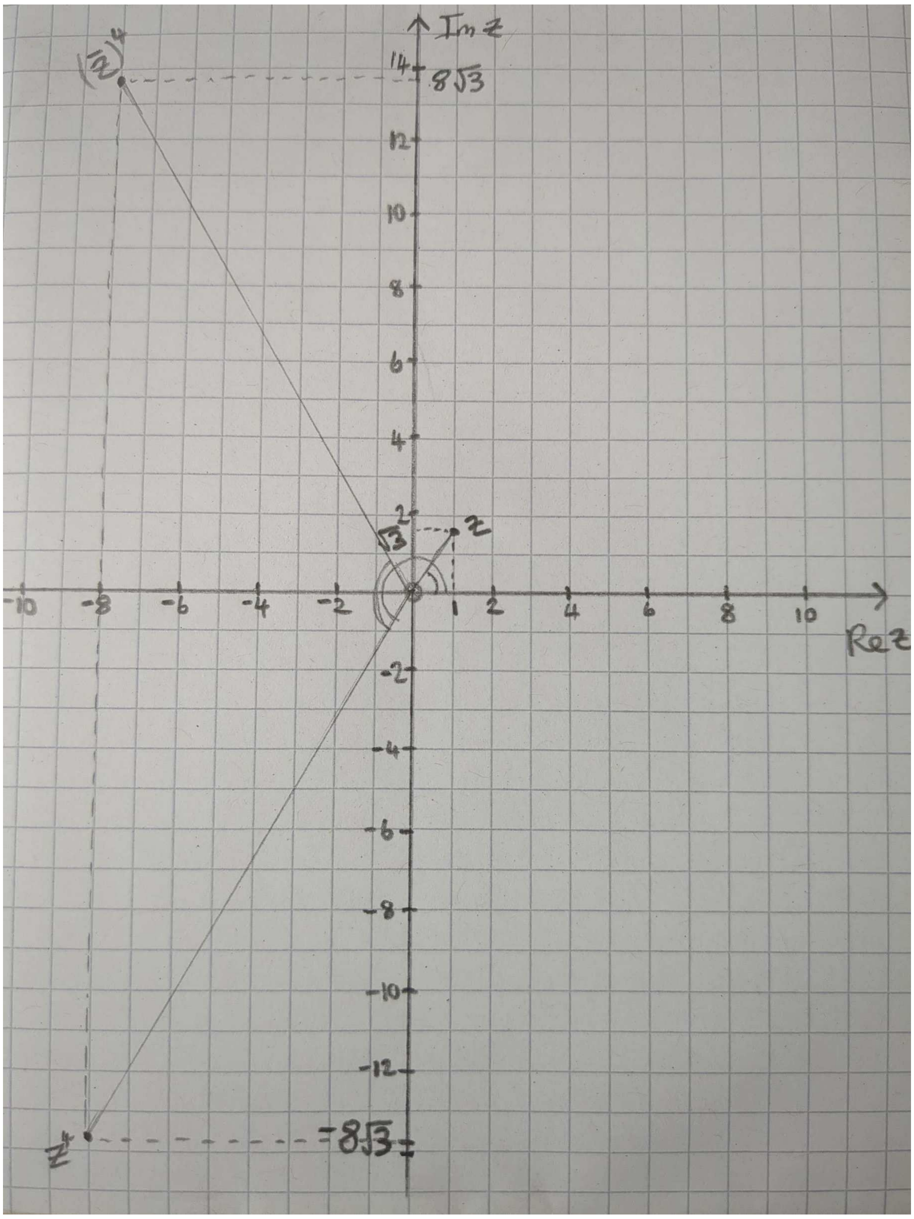
Ähnlich ist es

$$\mathrm{Re}(\bar{z}^4) = \mathrm{Re}((1-\sqrt{3}\mathrm{i})^4) = 1^4-6\cdot 1^2(-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^4 = 1-6\cdot 3+3^2 = -8$$

und

$$\mathrm{Im}(z^4) = 4\cdot 1\cdot -\sqrt{3}(1^2-(-\sqrt{3})^2) = -4\sqrt{3}\cdot(-2) = 8\sqrt{3}.$$

Wir stellen fest, dass $(\bar{z})^4 = -8+8\sqrt{3}\mathrm{i} = \overline{-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}} = \overline{z^4}$ ist.



(c) Nach Pythagoras ist den euklidischen Abstand zwischen z und 0 gleich

$$\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ebenfalls ist den euklidischen Abstand zwischen z^4 und 0 gleich

$$\sqrt{(\mathrm{Re}(z^4))^2 + (\mathrm{Im}(z^4))^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2(1+3)} = 8\sqrt{4} = 16.$$

Anmerkung: Der Abstand zu 0 ist der Betrag der komplexen Zahl und $|z^4| = 16 = 2^4 = |z|^4$.

(d) Wir können einfache Trigonometrie verwenden.

(i) Sei ϑ der zu berechnende Winkel. Die Ankathete von den Winkel ist $\mathrm{Re}(z) = 1$ und die Gegenkathete ist $\mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$. Daher ist $\tan(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Also $\vartheta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} = 60°$.

(ii) Der zu berechnende Winkel ist π (oder 180) plus der Winkel ϑ zwischen den Strecken von 0 bis z^4 und von 0 bis -1. Die Ankathete von ϑ ist $|\operatorname{Re}(z^4)| = |-8| = 8$ und die Gegenkathete ist $|\operatorname{Im}(z^4)| = |-8\sqrt{3}| = 8\sqrt{3}$. Daher ist $\tan(\vartheta) = \frac{8\sqrt{3}}{8}$. Also $\vartheta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} = 60°$ und der zu berechnende Winkel ist $\frac{4\pi}{3} = 240°$.
Anmerkung: Dieser Winkel ist das Argument der komplexen Zahlen z^4 und $\arg(z^4) = \frac{4\pi}{3} = 4\arg(z)$.

(iii) Aus der Skizze ist ersichtlich, dass der Winkel das Doppelte des in Teil (ii) gefundenen Winkels ϑ ist. Daher ist der zu berechnende Winkel $\frac{2\pi}{3}$ im Bogenmaß oder $120°$ im Gradmaß.
Anmerkung: $\vartheta = \frac{2\pi}{3} = 2\arg(z) = \arg(z) + \arg(\bar{z})$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 15. *Elementares Rechnen ohne Taschenrechner*

Vereinfachen Sie:

$$\frac{2\alpha^7 - 8\alpha^6 + 17\alpha^5 - 28\alpha^4 + 32\alpha^3 - 20\alpha^2 + 5\alpha}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} - (2\alpha^3 + 5).$$

Wir erwarten nicht nur die Lösung als $a(b+c)$, sondern auch vollständige Berechnungen.

Lösungshinweise hierzu:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\alpha^7 - 8\alpha^6 + 17\alpha^5 - 28\alpha^4 + 32\alpha^3 - 20\alpha^2 + 5\alpha}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} - (2\alpha^3 + 5) \\
&= \frac{2\alpha^7 - 8\alpha^6 + 17\alpha^5 - 28\alpha^4 + 32\alpha^3 - 20\alpha^2 + 5\alpha}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} + \\
&\quad \frac{-2\alpha^7 + 8\alpha^6 - 12\alpha^5 + 8\alpha^4 - 2\alpha^3 - 5\alpha^4 + 20\alpha^3 - 30\alpha^2 + 20\alpha - 5}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} \\
&= \frac{5\alpha^5 - 25\alpha^4 + 50\alpha^3 - 50\alpha^2 + 25\alpha - 5}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} \\
&= \frac{5(\alpha^5 - 5\alpha^4 + 10\alpha^3 - 10\alpha^2 + 5\alpha - 1)}{\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha + 1 + 6\alpha^2} \\
&= \frac{5(\alpha - 1)^5}{(\alpha - 1)^4} = 5(\alpha - 1).
\end{aligned}$$