A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

**4. Gruppenübung zur Vorlesung**
# Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 16.** *Polarkoordinaten*

Seien

$$z_1 = -1 - \mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}.$$

Berechnen Sie jeweils die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen und zeichnen Sie diese Zahlen in die komplexen Zahlenebene ein.

**(a)** $z_1$ **(c)** $z_1^3$ **(e)** $\dfrac{1}{\bar{z}_2}$

**(b)** $z_2$ **(d)** $z_1 \cdot z_2$ **(f)** $z_2^{40}$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir berechnen zuerst

$$|z_1| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

und nach 1.8.1 gilt damit

$$z_1 = -1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)\big)$$

für ein $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$. Durch Betrachtung der Werte der Funktionen $\cos$ und $\sin$ finden wir, dass $\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$ sein muss.

**(b)** Wir gehen genau wie in Teil **(a)** vor. Es gilt

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

und damit

$$z_2 = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{-1}{2}\right) = 1 \cdot \big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)\big) \quad \text{für} \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{6}.$$

**(c)** Mit den Rechenregeln aus 1.8.2 gilt

$$z_1^3 = |z_1|^3(\cos(3\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(3\varphi_1)) = (\sqrt{2})^3\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

**(d)** Wir benutzen wieder 1.8.2 und erhalten

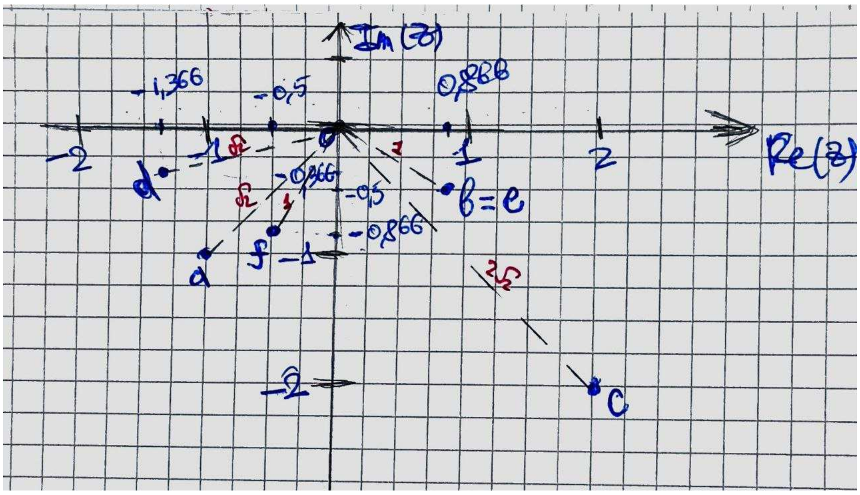
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

**(e)** Es gilt

$$\frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{z_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|}(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)) = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right).$$

**(f)** Es gilt

$$z_2^{40} = |z_2|^{40}(\cos(40\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(40\varphi_2)) = \cos\left(\frac{440\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{440\pi}{6}\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{220\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{220\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$




**Aufgabe H 17.** *Polarkoordinaten und komplexe Wurzeln*
Stellen Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen $z$ in Polarkoordinaten dar und bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = z$.

**(a)** $z = 2\mathrm{i}$, **(b)** $z = 1 - \mathrm{i}$,

**(c)** $z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})$, **(d)** $z = \cos(\sqrt{2}\,\pi) + \mathrm{i}\,\sin(-\sqrt{2}\,\pi)$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wie in der vorherigen Aufgabe berechnen wir

$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

und erhalten damit

$$z = 2\mathrm{i} = 2\,(0 + \mathrm{i}\cdot 1) = 2\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Nach 1.8.4 sind die 3-ten komplexen Wurzeln von $z$ dann gegeben durch

$$w_l = \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3})\big) \quad \text{für} \quad l \in \{0, 1, 2\};$$

oder

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6})\big) \tag{1}$$
$$w_1 = \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{5\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{6})\big) \tag{2}$$
$$w_2 = \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{3\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{2})\big) \tag{3}$$

**(b)** Es gilt

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

und damit

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Damit gilt

$$w_l = \sqrt[6]{2}\big(\cos\big(\frac{7\pi}{12} + l\frac{2\pi}{3}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{7\pi}{12} + l\frac{2\pi}{3}\big)\big) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2\};$$

oder

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\big(\cos\big(\frac{7\pi}{12}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{7\pi}{12}\big)\big) \tag{4}$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\big(\cos\big(\frac{5\pi}{4}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{5\pi}{4}\big)\big) \tag{5}$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\big(\cos\big(\frac{23\pi}{12}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{23\pi}{12}\big)\big) \tag{6}$$

**(c)** Es gilt

$$z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = (\sqrt{3})^2 - (\mathrm{i})^2 = 3 - (-1) = 4$$

und damit offenbar $|z| = 4$ bzw.

$$z = 4\,(1 + \mathrm{i}\cdot 0) = 4\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \quad \text{für} \quad \varphi = 0.$$

Die 3-ten komplexen Wurzeln von $z$ sind daher

$$w_l = \sqrt[3]{4}\big(\cos\big(l\frac{2\pi}{3}\big) + \mathrm{i}\sin\big(l\frac{2\pi}{3}\big)\big) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2\};$$

oder

$$w_0 = \sqrt[3]{4}\big(\cos\big(0\big) + \mathrm{i}\sin\big(0\big) = \sqrt[3]{4} \tag{7}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4}\big(\cos\big(\frac{2\pi}{3}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{2\pi}{3}\big)\big) \tag{8}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}\big(\cos\big(\frac{4\pi}{3}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{4\pi}{3}\big)\big) \tag{9}$$

**(d)** Es gilt

$$\begin{aligned} z = \cos(\sqrt{2}\pi) - \mathrm{i}\sin(\sqrt{2}\pi) &= \cos(-\sqrt{2}\pi) + \mathrm{i}\sin(-\sqrt{2}\pi) \\ &= 1\cdot\Big(\cos((2-\sqrt{2})\pi) + \mathrm{i}\sin((2-\sqrt{2})\pi)\Big) \end{aligned}$$

und damit

$$w_l = \cos\big(\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3} + l\frac{2\pi}{3}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3} + l\frac{2\pi}{3}\big) \quad \text{für} \quad l \in \{0,1,2\};$$

oder

$$w_0 = \cos\Big(\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) \tag{10}$$
$$w_1 = \cos\Big(\frac{(4-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{(4-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) \tag{11}$$
$$w_2 = \cos\Big(\frac{(6-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{(6-\sqrt{2})\pi}{3}\Big) \tag{12}$$

**Aufgabe H 18.** *Polynomdivision*

Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest, um für die nachfolgenden Polynome $f(X)$ und $g(X)$ jeweils Polynome $p(X)$ und $r(X)$ mit $f(X) = p(X)g(X)+r(X)$ zu bestimmen, wobei $r(X)$ kleineren Grad besitzt als $g(X)$.

**(a)** $f(X) = X^7 - 30X^6 + 4X^5 + 3X^2 - 90X + 12$ und $g(X) = X^5 + 3$;

**(b)** $f(X) = X^7 - 5$ und $g(X) = X^3 - 2$;

**(c)** $f(X) = 15X^7 + 10X^6 - 5X^5 + 12X^4 - 3X^3 + 12X^2 - 36X + 23$ und $g(X) = 5X^4 - 6X + 3$;

**(d)** $f(X) = X^9 - 6X^7 - 5X^6 - 6X^5 - 5X^4 + X^3 - 6X^2 - 56X - 54$ und $g(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 8$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir berechnen:

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\big( & X^7 - 30X^6 & +4X^5 & +3X^2 & -90X & +12 & \big) \div \left(X^5+3\right) = X^2-30X+4 \\
 & -X^7 \phantom{- 30X^6} & & -3X^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & -30X^6 & +4X^5 & & -90X & & \\
 & 30X^6 & & & +90X & & \\
\cline{2-5}
 & & 4X^5 & & & +12 & \\
 & & -4X^5 & & & -12 & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Die gesuchten Polynome sind somit $p(X) = X^2 - 30X + 4$ und $r(X) = 0$.

**(b)** Wir berechnen:

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\big( & X^7 & & & -5 & \big) \div \left(X^3-2\right) = X^4 + 2X + \dfrac{4X-5}{X^3-2} \\
 & -X^7 & +2X^4 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 2X^4 & & & \\
 & & -2X^4 & +4X & & \\
\cline{3-4}
 & & & 4X & -5 &
\end{array}
$$

Die gesuchten Polynome sind somit $p(X) = X^4 + 2X$ und $r(X) = 4X - 5$.

**(c)** Wir berechnen:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
15X^7 & +10X^6 & -5X^5 & +12X^4 & -3X^3 & +12X^2 & -36X & +23 & = \left(5X^4-6X+3\right)\left(3X^3+2X^2-X+6\right) + 3X + 5 \\
-15X^7 & & & +18X^4 & -9X^3 & & & & \\
\cline{1-5}
 & 10X^6 & -5X^5 & +30X^4 & -12X^3 & +12X^2 & & & \\
 & -10X^6 & & & +12X^3 & -6X^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -5X^5 & +30X^4 & & +6X^2 & -36X & & \\
 & & 5X^5 & & & -6X^2 & +3X & & \\
\cline{3-7}
 & & & 30X^4 & & & -33X & +23 & \\
 & & & -30X^4 & & & +36X & -18 & \\
\cline{4-8}
 & & & & & & 3X & +5 &
\end{array}
$$

Die gesuchten Polynome sind somit $p(X) = 3X^3 + 2X^2 - X + 6$ und $r(X) = 3X + 5$.

**(d)** Wir berechnen:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
X^9 & -6X^7 & -5X^6 & -6X^5 & -5X^4 & +X^3 & -6X^2 & -56X & -54 & = \left(X^6+X^4+X^2+8\right)\left(X^3-7X-5\right) - X^2 - 14 \\
-X^9 & -X^7 & & -X^5 & & -8X^3 & & & & \\
\cline{1-6}
 & -7X^7 & -5X^6 & -7X^5 & -5X^4 & -7X^3 & -6X^2 & -56X & & \\
 & 7X^7 & & +7X^5 & & +7X^3 & & +56X & & \\
\cline{2-8}
 & & -5X^6 & & -5X^4 & & -6X^2 & & -54 & \\
 & & 5X^6 & & +5X^4 & & +5X^2 & & +40 & \\
\cline{3-9}
 & & & & & & -X^2 & & -14 &
\end{array}
$$

Die gesuchten Polynome sind somit $p(X) = X^3 - 7X - 5$ und $r(X) = -X^2 - 14$.

**Aufgabe H 19.** *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit.
Bestimmen Sie gegebenenfalls eine obere Schranke, eine untere Schranke bzw. beides.

**(a)** $a_n = \dfrac{n+3}{2n}$

**(b)** $a_n = n\cos(\pi(n+1))$

**(c)** $a_n = 1 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

**(d)** $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Es gilt $a_n = \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$ und wegen $\frac{3}{2n} > \frac{3}{2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
Weiter gilt $0 < \frac{3}{2n} \leqq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\frac{1}{2}$ eine untere und $2$ eine obere Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(b)** Es gilt

$$\cos\left(\pi(n+1)\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2k-1 \\ -1 & \text{für } n = 2k \end{cases}$$

Wir betrachten nun die zwei Teilfolgen

$$(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (2k+1)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (-2k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Die erste Teilfolge ist monoton wachsend und nach oben nicht beschränkt, die zweite Teilfolge ist monoton fallend und nach unten nicht beschränkt. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton noch beschränkt.

**(c)** Es gilt

$$|a_n| \leqq 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqq 1 + 1^n = 2.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben un nach unten beschränkt durch $2$ bzw. $-2$.
Weiter gilt $a_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n > 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton.

**(d)** Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und daher

$$|a_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit ist die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben un nach unten beschränkt durch $\frac{\sqrt{3}}{2}$ bzw. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Weiter gilt

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } n = 4k+1 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{für } n = 4k+3 \\ 0 & \text{für } n = 2l \end{cases} \quad \text{wegen} \quad \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 4k+1 \\ -1 & \text{für } n = 4k+3\,. \\ 0 & \text{für } n = 2l \end{cases}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton.

**Frischhaltebox**

**Aufgabe H 20.** *Komplexe Zahlenebene*
Skizzieren Sie die folgende Menge in der komplexen Zahlenebene:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Big( (2\,\mathrm{Re}(z) + 3\,\mathrm{Im}(z) \leqq 4) \;\wedge\; (2\,\mathrm{Re}(z) - 3\,\mathrm{Im}(z) \leqq 4) \;\wedge\; (\mathrm{Re}(z) \geqq -1) \Big) \\ \vee\; (\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 9) \end{array} \right\}$$

**Lösungshinweise hierzu:**
Die Menge können wir alternativ schreiben als

$$A = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \,\middle|\, \Big( (2a + 3b \leqq 4) \ \wedge \ (2a - 3b \leqq 4) \ \wedge \ (a \geqq -1) \Big) \ \vee \ (a^2 + b^2 = 9) \right\}$$
$$= \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \,\middle|\, \Big( (b \leqq \tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{3}a) \ \wedge \ (b \geqq \tfrac{3}{2}a - \tfrac{4}{3}) \ \wedge \ (a \geqq -1) \Big) \ \vee \ (a^2 + b^2 = 9) \right\}$$

Damit ist die Menge ein Abspielsymbol. Genauer ist Sie in Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt in $(0,0)$ und ein Dreieck mit den Spitzen in $(-1,2), (-1,-2)$ und $(2,0)$.