A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

5. Gruppenübung zur Vorlesung
Höhere Mathematik 1

M. Stroppel

Wintersemester 2023

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 21. *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie, falls möglich, eine obere bzw. untere Schranke an.

(a) $\left(n\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi(2n-\frac{4}{3})\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Wir nutzen die 2π-Periodizität $\cos(x+2\pi k)=\cos(x)$ für $k\in\mathbb{Z}$, um die Folge besser zu verstehen. Es ist

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3}{2}\pi(2n-\frac{4}{3})\right) &= \cos\big(3\pi n-2\pi)\big) = \cos\big(3\pi n\big)\\ &= \begin{cases}\cos\big(6\pi k\big) & \text{für } n=2k\\ \cos\big(6\pi k+2\pi+\pi\big) & \text{für } n=2k+1\end{cases}\\ &= \begin{cases}\cos\big(0\big)=1 & \text{für } n=2k\\ \cos\big(\pi\big)=-1 & \text{für } n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi(2n-\frac{4}{3})\right)^n = \begin{cases}1 & \text{für } n=2k\\ -1 & \text{für } n=2k+1\end{cases}.$$

Also ist $(a_n)_n=(n(-1)^n)_n$.

Die Folge ist nicht monoton, da sie zwischen positiven und negativen Zahlen hin und her springt. Sauberer notiert: $a_{2k}=2k>-(2k+1)=a_{2k+1}$ und $a_{2k+1}=-(2k+1)<2k+2=a_{2k+2}$.

Die Folge ist nach unten und oben unbeschränkt, denn $a_{2k+1}=-2k-1\to-\infty$ für $k\to\infty$, während $a_{2k}=2k\to+\infty$ für $k\to\infty$.

(b) $\left(\sqrt{19(n+5)}-\sqrt{19n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned}a_n=\sqrt{19(n+5)}-\sqrt{19n} &= \frac{\big(\sqrt{19(n+5)}-\sqrt{19n}\big)\big(\sqrt{19(n+5)}+\sqrt{19n}\big)}{\sqrt{19(n+5)}+\sqrt{19n}}\\ &= \frac{19\cdot 5}{\sqrt{19(n+5)}+\sqrt{19n}}\\ &> \frac{19\cdot 5}{\sqrt{19((n+1)+5)}+\sqrt{19(n+1)}}=a_{n+1},\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass ein Bruch kleiner wird, wenn wir bei gleichem Zähler den Nenner vergrößern. Unsere Folge ist also monoton fallend. Somit erhalten wir sofort die obere Schranke $a_1=\frac{5\cdot\sqrt{19}}{\sqrt{6}+1}$. Außerdem ist $a_n>0$ und somit 0 eine untere Schranke.

(c) $\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n}-8\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $a_n = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} - 8 = \sqrt[3]{n}\big(\sqrt[3]{n} - 1\big) - 8 < \sqrt[3]{n+1}\big(\sqrt[3]{n+1} - 1\big) - 8 = a_{n+1}$, wobei wir die Monotonie der Wurzelfunktion nutzen. Die Folge wächst also monoton. Somit ist eine untere Schranke $a_1 = -8$. Wegen $a_n = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n} - 8 = \sqrt[3]{n}\big(\sqrt[3]{n} - 1\big) - 8 \geqq \sqrt[3]{n}$ für $n \geqq 64$ und wegen $\sqrt[3]{n} \to \infty$ gilt $a_n \to \infty$. Es existiert also keine obere Schranke.

(d) $\left(\frac{1}{n^4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Wir gehen vor wie in (a).

$$\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}(2n-1)\right) = \sin\left(\pi n - \tfrac{\pi}{2}\right) &= \begin{cases} \sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) & \text{für } n = 2k \\ \sin\left(2\pi k + \pi - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 & \text{für } n = 2k \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Also ist $(a_n)_n = \left(\frac{1}{n^4}\right)_n$, welche wegen $a_n = \frac{1}{n^4} > \frac{1}{(n+1)^4} = a_{n+1}$ ebenfalls monoton fallend und darüberhinaus positiv ist. Wir erhalten die obere Schranke $a_1 = 1$ und die untere Schranke 0.

Aufgabe H 22. *Häufungspunkte*

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Häufungspunkte. Geben Sie jeweils zu jedem Häufungspunkt eine gegen diesen konvergierende oder bestimmt divergierende Teilfolge an.

(a) $\left(\sqrt{25(n+7)} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Hier nutzen wir eine Standardumformung, wie sie auch im Skript zu finden ist, bei der wir geschickt erweitern um die dritte binomische Formel verwenden zu können.

$$\begin{aligned}
a_n = \sqrt{25(n+7)} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{25(n+7)} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{25(n+7)} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{25(n+7)} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{24n + 25\cdot 7}{\sqrt{25(n+7)} + \sqrt{n}} \\
&> \frac{24n + 25\cdot 7}{\sqrt{25(n+7)} + \sqrt{n+7}} \\
&= \frac{24n + 25\cdot 7}{\sqrt{n+7}(\sqrt{25}+1)} \\
&= \frac{24(n+7)}{6\sqrt{n+7}} \\
&= 4\sqrt{n+7} \to +\infty \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge divergent gegen $+\infty$, es liegt ein Häufungspunkt $+\infty$ vor.

(b) $\left(6\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)(5n+3)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Wir erhalten die Teilfolgen

(i) $(a_{4l+1})_{l\in\mathbb{N}_0} = \big(6(20l+8)\big)_{l\in\mathbb{N}_0}$, divergent mit uneigentlichem Grenzwert $+\infty$.

(ii) $(a_{4l+3})_{l\in\mathbb{N}_0} = \big(-6(20l+18)\big)_{l\in\mathbb{N}_0}$, divergent mit uneigentlichem Grenzwert $-\infty$.

(iii) $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \big(0\big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 0.

Somit sind die Häufungspunkte gegeben durch $-\infty$, 0 und $+\infty$.

(c) $\big(\mathrm{Im}((1+\mathrm{i})^n)2^{-n/2}\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Lösungshinweise hierzu: Es ist $(1+\mathrm{i})^n = (\sqrt{2})^n\big(\cos(\frac{\pi}{4}n)+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}n)\big)$. Also ist $\mathrm{Im}(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\sin\big(\frac{\pi}{4}n\big)$. Somit ist $(a_n)_n = \big(\sin\big(\frac{\pi}{4}n\big)\big)_n$. Wir erhalten folgende Teilfolgen.

(i) $(a_{8k+1})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) $(a_{8k+2})_{k\in\mathbb{N}_0} = (1)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 1.

(iii) $(a_{8k+3})_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iv) $(a_{8k+4})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.

(v) $(a_{8k+5})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(vi) $(a_{8k+6})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-1)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert -1.

(vii) $(a_{8k+7})_{k\in\mathbb{N}_0} = (-\frac{\sqrt{2}}{2})_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(viii) $(a_{8k+8})_{k\in\mathbb{N}_0} = (0)_k$, konvergent (sogar konstant) mit Grenzwert 0.

Somit sind die Häufungspunkte gegeben durch -1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1.

Aufgabe H 23. *ε-Kriterium*

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert a der nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie jeweils speziell für $\varepsilon = 10^{-18}$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_\varepsilon$.

(a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 99\left(\frac{1}{100}\right)^k$ **(b)** $a_n = \frac{n^3-27}{8n^3}$

Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus der Frischhaltebox!

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist nach der geometrischen Summenformel

$$a_n = 99\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{100}\right)^k = 99\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{100}} = 99\cdot\frac{100-\left(\frac{1}{100}\right)^{n}}{99} = 100-\left(\frac{1}{100}\right)^n.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 100$. Es ist

$$|a_n - 100| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 10^{-2n} < 10^{-18} \quad\Leftrightarrow\quad 2n > 18 \Leftrightarrow \quad n > 9.$$

Also wählen wir zum Beispiel $n_\varepsilon = 10$.

(b) Es ist
$$a_n = \frac{n^3 - 27}{8n^3} = \frac{1}{8} - \frac{27}{8n^3}.$$
Damit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8}$. Es ist
$$\left|a_n - \frac{1}{8}\right| \overset{!}{<} 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{27}{8n^3} < 10^{-18} \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{27}{8} \cdot 10^{18}} = \frac{3}{2} \cdot 10^6.$$
Da $\frac{3}{2} < 2$, ist zum Beispiel $n_\varepsilon = 2000000$ eine geeignete Wahl.

Aufgabe H 24. *Konvergenz und Häufungspunkte*

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Bestimmen Sie zudem jeweils alle Häufungspunkte, sowie den Limes superior und den Limes inferior der Folgen.

(a) $a_n = \dfrac{36n^3 - 9}{24n^2 + 12\sqrt{n}}$

(b) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\dfrac{2n}{3^{n^2}}} + \dfrac{\cos(n)}{n}$

(c) $a_n = \operatorname{Re}\left(2^{-n}\left(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n\right)$

(d) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k + (-1)^k}{5^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$a_n = \frac{36n^3 - 9}{24n^2 + 12\sqrt{n}} = \frac{(6n\sqrt{n} - 3)(6n\sqrt{n} + 3)}{4\sqrt{n}(6n\sqrt{n} + 3)} = \frac{6n\sqrt{n} - 3}{4\sqrt{n}} = \frac{3}{4}\left(2n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \frac{3}{4}n,$$
wobei die letzte Ungleichung aus
$$2n\sqrt{n} - 1 > 2n\sqrt{n} - n\sqrt{n} = n\sqrt{n} \quad \Longrightarrow \quad 2n - \frac{1}{\sqrt{n}} > n$$
folgt. Die Folge $(\frac{3}{4}n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Da nun $a_n > \frac{3}{4}n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) und es gilt $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(b) Wir können die Folgenglieder schreiben als
$$a_n = (-1)^n \sqrt[n]{\frac{2n}{3^{n^2}}} + \frac{\cos(n)}{n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} + \frac{\cos(n)}{n} = b_n + c_n$$
mit $b_n := \left(-\frac{1}{3}\right)^n \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ und $c_n := \frac{\cos(n)}{n}$. Wir untersuchen nun separat die Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
Da $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, folgt mit Beispiel 1.5.8.1, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Mit Beispiel 1.5.7 erhalten wir zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und aus Beispiel 1.5.10 schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt somit insgesamt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Betrachten wir nun $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir erhalten wegen $-1 \leqq \cos(n) \leqq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\cos(n)}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, folgt mit dem Sandwichsatz 1.5.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.
Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 folgt damit schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es folgt mit Satz 1.6.10 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Wegen $2^{-n}\left(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)$ können die Folgenglieder geschrieben werden als $a_n = \operatorname{Re}\left(\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)$.
Wir finden Teilfolgen so, dass der Cosinus-Term in jeder Teilfolge konstant bleibt:

$$a_{3k} = \cos(4\pi k) = 1, \qquad a_{3k+1} = \cos\left(4\pi k + \tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2},$$
$$a_{3k+2} = \cos\left(4\pi k + \tfrac{8\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}.$$

Jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch ein Glied einer der konstanten Teilfolgen $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ abgedeckt. Die Häufungspunkte sind genau die Grenzwerte dieser Teilfolgen, also 1 und $-\frac{1}{2}$.
Es gilt somit $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungspunkt besitzt, ist sie nach Satz 1.6.10 divergent.

(d) Wir schreiben die Folgenglieder als

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k + (-1)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k.$$

Da $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ und $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$, folgt mit dem Beispiel der geometrischen Reihe 2.8.4

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Mit den Grenzwertsätzen 1.5.3 für Folgen erhalten wir insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k + (-1)^k}{5^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} = \frac{5}{2}.$$

Mit Satz 1.6.10 folgt damit $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 25. *Teleskopsummen*

(a) Zeigen Sie, dass $(1-q)\sum_{k=1}^{n} q^k = q - q^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $q \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} q^k = -\sum_{k=1}^{n} q^k(q-1) = -\sum_{k=1}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right) \overset{(*)}{=} -(q^{n+1}-q) = q - q^{n+1}$$

und somit folgt die Behauptung. Schritt $(*)$ ergibt sich direkt aus dem Ergebnis in P2(b) auf Blatt 1 oder aus der vollständigen Induktion:

IA Wir zeigen die Aussage für $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}\left(q^{k+1}-q^k\right) = q^2 - q = q^{1+1} - q$.

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es ist $\sum_{k=1}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right) = q^{n+1} - q$.

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter der Annahme der Induktionshypothese für n:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\left(q^{k+1}-q^k\right) = q^{n+2} - q^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(q^{k+1}-q^k\right) &\overset{\text{IH}}{=} q^{n+2} - q^{n+1} + q^{n+1} - q \\ &= q^{(n+1)+1} - q.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Damit bekommen wir (für $q = \frac{3}{4}$)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \sum_{k=1}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 &= 4\left(1-\frac{3}{4}\right)\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 \\ &= 4\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{16}\right) + 1 = 4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^{15} = \frac{4^{16}-3^{16}}{4^{15}}.\end{aligned}$$