Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 26. *Teleskopreihen*

(a) Bestimmen Sie die folgenden Reihenwerte:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci Folge mit $f_0 = f_1 = 1$ und $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = 1$ gilt. *Hinweis:* $\frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = \frac{f_k}{f_k}\frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)} \\
&= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} \\
&= \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}
\end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+2} = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+2)} - \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) Es gilt

$$\frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = \frac{f_k}{f_{k-1}f_kf_{k+1}} = \frac{f_{k+1}-f_{k-1}}{f_{k-1}f_kf_{k+1}} = \frac{1}{f_{k-1}f_k} - \frac{1}{f_kf_{k+1}}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f_{1-1}f_1} - \frac{1}{f_nf_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{f_nf_{n+1}} = 1.$$

Letzteres Gleicheitszeichen gilt, da $0 \leqq \frac{1}{f_nf_{n+1}} \leqq \frac{1}{n^2}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ und wegen des Sandwichsatzes.

Aufgabe H 27. *Geometrische Reihe*

Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte, wobei $x > 0$ gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{3}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{k}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^k+4)^k}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+3}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3^{1/3}}} = \frac{1}{3-3^{2/3}}.$$

(b) Wegen $x > 0$ gilt $|x-2|^2 - |x+2|^2 = -4x < 0$ und somit $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 1$. Daher folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{x-2}{x+2}} = \frac{x+2}{x+2-(x-2)} = \frac{x+2}{4}.$$

(c) Zuerst beobachten wir, dass

$$\frac{1}{((-1)^k+4)^k} = \begin{cases} \frac{1}{5^k} & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^k} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. Damit können wir die n-the Partialsumme aufteilen und erhalten für gerades $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{((-1)^k+4)^k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{5^{2k}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{3^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{25}\right)^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

und einen analogen Ausdruck für ungerades $n \in \mathbb{N}$. Grenzwerbildung liefert dann insbesondere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((-1)^k+4)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{25}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{25}{24} + \frac{3}{8} = \frac{25+9}{24} = \frac{34}{24} = \frac{17}{12}.$$

Aufgabe H 28. *Folgen komplexer Zahlen*

Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert z genau dann, wenn sowohl $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ als auch $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$ gilt. Gibt es kein solches $z \in \mathbb{C}$, dann nennt man die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz:

(a) $a_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$

(b) $b_n = \frac{3n^2+\mathrm{i}}{4\mathrm{i}n^2+5}$

(c) $c_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{2+\mathrm{i}}\right)^k$

(d) $d_n = \max\left\{\operatorname{Re} w \;\middle|\; w^n = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right\}$

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass 2.5.3, 2.5.4 und 2.5.8.1 auch für Folgen komplexer Zahlen gelten.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})$ und daher

$$\operatorname{Re}(a_{8k+j}) = \cos(\frac{\pi j}{4}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } j \in \{0,\ldots,7\}.$$

Die Folge $\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hat also mindestens 2 verschiedene Häufungspunkte und kann damit nicht konvergieren. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert also.

(b) Es gilt

$$\frac{3n^2+\mathrm{i}}{4\mathrm{i}n^2+5} = \frac{(3n^2+\mathrm{i})(5-4\mathrm{i}n^2)}{25+16n^4} = \frac{15n^2+5\mathrm{i}-12\mathrm{i}n^4+4n^2}{25+16n^4}$$
$$= \underbrace{\frac{\frac{19}{n^2}}{\frac{25}{n^4}+16}}_{\to 0} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{\frac{5}{n^4}-12}{\frac{25}{n^4}+16}}_{\to -\frac{12}{16}} \to -i\frac{12}{16} = -i\frac{3}{4}$$

für $n \to \infty$.

(c) Mit $q := \frac{2}{2+\mathrm{i}}$ gilt, wie für reelle Zahlen,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}q^n$$

und es genügt die Folge mit Folgengliedern $\tilde{c}_n := q^n = \left(\frac{2}{2+\mathrm{i}}\right)^n$ auf Konvergenz zu untersuchen. Dazu berechnen wir

$$|q| = |\frac{2}{2+\mathrm{i}}| = \frac{2}{|2+\mathrm{i}|} = \frac{2}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

und wegen 2.5.8.1 folgt daraus $\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = 0$. Insbesondere folgt damit

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q}\underbrace{\tilde{c}_n}_{\to 0} \to \frac{1}{1-q} =$$
$$\frac{2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}-2\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})^2}{1+4} = \frac{4+4\mathrm{i}-1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}.$$

(d) Es gilt $|2\sqrt{3}+2\mathrm{i}| = \sqrt{4\cdot 3+4} = \sqrt{16} = 4$ und damit

$$2\sqrt{3}+2\mathrm{i} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Die n-ten Wurzeln $w_0, \ldots, w_{n-1}$ von $2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ sind daher gegeben durch

$$w_j = \sqrt[n]{4} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6n} + j\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i} \sin\left(\frac{\pi}{6n} + j\frac{2\pi}{n}\right) \right).$$

Der Realteil einer solchen Wurzel ist

$$\operatorname{Re} w_j = \sqrt[n]{4} \cos\left(\frac{\pi}{6n} + j\frac{2\pi}{n}\right).$$

Damit können wir d_n darstellen als

$$d_n = \sqrt[n]{4} \max \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6n} + j\frac{2\pi}{n}\right) \,\middle|\, j \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Insbesondere haben bekommen wir

$$d_n \geqq \sqrt[n]{4} \cos\left(\frac{\pi}{6n} + 0 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \underbrace{\sqrt[n]{4}}_{\to 1} \underbrace{\cos\Big(\underbrace{\frac{\pi}{6n}}_{\to 0}\Big)}_{\to 1} \to 1$$

für $n \to \infty$ und wegen $\cos(x) \leqq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$d_n \leqq \sqrt[n]{4} \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daher $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$.

Aufgabe H 29. *Sandwichsatz*

Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes die Grenzwerte der folgenden Folgen:

(a) $\left(\sqrt[n]{3^n + 4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\dfrac{n^2 + \cos(n)}{n^2 - \sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n^2 - 2n + 5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + 4k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(a) Es gelten

$$\sqrt[n]{3^n + 4^n} \geqq \sqrt[n]{4^n} = 4 \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{3^n + 4^n} \leqq \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{2}4 \to 4 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4$.

(b) Es gelten

$$\frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 - \sin(n)} \geqq \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 1 \quad \text{und} \quad \frac{n^2 + \cos(n)}{n^2 - \sin(n)} \leqq \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\cos(n)}{n^2-\sin(n)} = 1$.

(c) Wegen $n^2 - 2n + 5 > 0$ folgt direkt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 2n + 5}\right)^n \leqq 1^n = 1.$$

Weiter gilt $x = -\frac{1}{n^2-2n+5} = -\frac{1}{(n-1)^2+4} \geqq -\frac{1}{4} > -1$ und daher folgt aus der Bernoullischen Ungleichungen

$$\left(1 - \frac{1}{n^2 - 2n + 5}\right)^n = (1+x)^n \geqq 1 + nx = 1 - \frac{n}{n^2 - 2n + 5} = 1 - \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2-2n+5}\right)^n = 1$.

(d) Wegen $2n^2 + 4k \geqq 2n^2$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + 4k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4} \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{4}$$

für $n \to \infty$. Weiter gilt für $k \leqq n$

$$2n^2 + 4k \leqq 2n^2 + 4n = 2n(n+2)$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+4k} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n(n+2)} = \frac{1}{2n(n+2)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2n(n+2)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4} \frac{n+1}{n+2} \to \frac{1}{4}$$

für $n \to \infty$. Mit dem Sandwichsatz ist daher $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2+4k} = \frac{1}{4}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 30. *Komplexe Zahlen, Polarkoordinaten*

Ordnen Sie die nachstehenden komplexen Zahlen ihren näherungsweise angegebenen Argumenten und Beträgen zu:

z	$\arg(z)$	$\lvert z\rvert$
$6+4\mathrm{i}$	1.750π	8.25
$-4-5\mathrm{i}$	0.187π	6.40
$3-3\mathrm{i}$	0.578π	4.24
$-2+8\mathrm{i}$	1.285π	7.21

Lösungshinweise hierzu: Es ist

$$\begin{aligned}
|6+4\mathrm{i}| &= \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{51} \Rightarrow 7 < |6+4\mathrm{i}| < 8\\
|-4-5\mathrm{i}| &= \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \Rightarrow 6 < |-4-5\mathrm{i}| < 7\\
|3-3\mathrm{i}| &= \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Rightarrow 4 < |3-3\mathrm{i}| < 5\\
|-2+8\mathrm{i}| &= \sqrt{2^2+8^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} \Rightarrow 8 < |-2+8\mathrm{i}| < 9
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen mit positiven Real- und Imaginärteil liegen im 1. Quadranten der komplexen Ebene, das Argument der komplexen Zahl liegt also zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Somit ist $0 < \arg(6+4\mathrm{i}) \approx 0.187\pi < \frac{\pi}{2}$. Mit einer ähnlichen Argumentation lassen sich auch die anderen Argumente herleiten.

Somit haben die komplexen Zahlen näherungsweise die folgenden Polarkoordinatendarstellungen:

$$\begin{aligned}
6+4\mathrm{i} &\approx 7.21\,(\cos(0.187\pi)+\mathrm{i}\sin(0.187\pi))\\
-4-5\mathrm{i} &\approx 6.40\,(\cos(1.285\pi)+\mathrm{i}\sin(1.285\pi))\\
3-3\mathrm{i} &\approx 4.24\,(\cos(1.750\pi)+\mathrm{i}\sin(1.750\pi))\\
-2+8\mathrm{i} &\approx 8.25\,(\cos(0.578\pi)+\mathrm{i}\sin(0.578\pi))
\end{aligned}$$