Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 31. *Grenzwert mit Reihe*

(a) Zeigen Sie, dass $(k+2)! \geqq 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\,k!} \leqq \frac{2}{m^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\,k!}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt

$$(k+2)! = \prod_{j=1}^{k+2} j = \prod_{j=2}^{k+2} j \overset{j\geqq 2}{\geqq} \prod_{j=2}^{k+2} 2 = 2^k.$$

(b) Wegen $\frac{1}{2m} < 1$ für $m \in \mathbb{N}$ und der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\,k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{k+2}(k+2)!} = \frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k(k+2)!} &\leqq \frac{1}{m^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)^k} \\ &= \frac{1}{m^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2m}} = \frac{1}{m^2}\frac{2}{2-\frac{1}{m}} \leqq \frac{2}{m^2}.\end{aligned}$$

(c) Nach **(b)** gilt

$$m\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k\,k!} \leqq m\frac{2}{m^2} = \frac{2}{m} \quad \text{und es gilt auch} \quad m\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{m^k\,k!}}_{\geqq 0} \geqq 0.$$

Mit dem Sandwichsatz folgt daraus, dass der gesuchte Grenzwert Null ist.

Aufgabe H 32. *Skalarprodukt und spezielle Vektoren*

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren mit den Eigenschaften $\langle v_i \,|\, v_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle v_i \,|\, v_i\rangle = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Berechnen Sie $\langle v_1 + v_2 - v_3 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4\rangle$ und $|v_1 + v_2 - v_3|^2$ falls $n = 4$.

(b) Berechnen Sie $\langle c \,|\, d\rangle$ und $|c|^2$ für $c = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ und $d = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie, dass $|x-y|^2 = |x|^2 - |y|^2$ gilt für $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, v_k\rangle\, v_k$ und $x \in V$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\langle v_1 + v_2 - v_3 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle \\
&= \langle v_1 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle + \langle v_2 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle - \langle v_3 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle \\
&= \Big(\langle v_1 \,|\, v_2 \rangle + 2 \langle v_1 \,|\, v_3 \rangle + 17 \langle v_1 \,|\, v_4 \rangle \Big) + \Big(\langle v_2 \,|\, v_2 \rangle + 2 \langle v_2 \,|\, v_3 \rangle + 17 \langle v_2 \,|\, v_4 \rangle \Big) \\
&\quad - \Big(\langle v_3 \,|\, v_2 \rangle + 2 \langle v_3 \,|\, v_3 \rangle + 17 \langle v_3 \,|\, v_4 \rangle \Big) \\
&= \Big(0 + 2 \cdot 0 + 17 \cdot 0\Big) + \Big(1 + 2 \cdot 0 + 17 \cdot 0\Big) - \Big(0 + 2 \cdot 1 + 17 \cdot 0\Big) \\
&= 0 + 1 - 2 = -1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&|v_1 + v_2 - v_3|^2 \\
&= \langle v_1 + v_2 - v_3 \,|\, v_1 + v_2 - v_3 \rangle \\
&= \langle v_1 \,|\, v_1 + v_2 - v_3 \rangle + \langle v_2 \,|\, v_1 + v_2 - v_3 \rangle - \langle v_3 \,|\, v_1 + v_2 - v_3 \rangle \\
&= \Big(\langle v_1 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_1 \,|\, v_2 \rangle - \langle v_1 \,|\, v_3 \rangle \Big) + \Big(\langle v_2 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_2 \,|\, v_2 \rangle - \langle v_2 \,|\, v_3 \rangle \Big) \\
&\quad - \Big(\langle v_3 \,|\, v_1 \rangle + \langle v_3 \,|\, v_2 \rangle - \langle v_3 \,|\, v_3 \rangle \Big) \\
&= \Big(1 + 0 - 0\Big) + \Big(0 + 1 - 0\Big) - \Big(0 + 0 - 1\Big) \\
&= 1 + 1 - (-1) = 3.
\end{aligned}$$

Alternative: Wir benutzen **(b)** mit $n = 4$, $c = v_1 + v_2 - v_3$ und $d = v_2 + 2v_3 + 17v_4$. Dann folgen direkt

$$\langle v_1 + v_2 - v_3 \,|\, v_2 + 2v_3 + 17v_4 \rangle = \langle (1, 1, -1, 0) \,|\, (0, 1, 2, 17) \rangle = 1 - 2 = -1$$

und

$$|v_1 + v_2 - v_3|^2 = |(1, 1, -1, 0)|^2 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle c \,|\, d \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} a_k \left\langle v_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k b_j \langle v_k \,|\, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \langle v_k \,|\, v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \langle a \,|\, b \rangle
\end{aligned}$$

und daher

$$|c|^2 = \langle c \,|\, c \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = |a|^2.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= \langle x-y \,|\, x-y\rangle = |x|^2 - 2\,\langle x \,|\, y\rangle + |y|^2 \\ &= |x|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, \langle x \,|\, v_k\rangle\, v_k\rangle + |y|^2 \\ &= |x|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, v_k\rangle^2 + |y|^2 \\ &\overset{\text{(b)}}{=} |x|^2 - 2|y|^2 + |y|^2 = |x|^2 - |y|^2. \end{aligned}$$

Aufgabe H 33. *Untervektorräume*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

(a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+3y+5z=0\right\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2) \geqq 0\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$.

(c) $\left\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto a\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e} \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$ ist ein Untervektorraum von $C^1(\mathbb{R})$.

(d) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y\rangle = 0$ für alle $y \in Y\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ für $Y \subseteqq \mathbb{R}^n$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir setzen $A := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+3y+5z=0\right\}$ und zeigen, dass dies ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Offenbar ist $A \subseteqq \mathbb{R}^3$ und wir müssen nur noch überprüfen, ob die drei definierenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es gilt $0 = (0,0,0) \in A$, denn $0 + 3\cdot 0 + 5\cdot 0 = 0$.
- Seien (x,y,z) und $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ in A beliebig. Dann gelten also $x+3y+5z=0$ und $\tilde{x}+3\tilde{y}+5\tilde{z}=0$. Damit folgt
$$(x+\tilde{x}) + 3(y+\tilde{y}) + 5(z+\tilde{z}) = (x+3y+5z) + (\tilde{x}+3\tilde{y}+5\tilde{z}) = 0+0 = 0$$
und somit $(x,y,z) + (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \in A$.
- Seien $(x,y,z)\in A$ und $s\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt also $x+3y+5z=0$. Damit folgt
$$(sx) + 3(sy) + 5(sz) = s(x+4y+5z) = s\cdot 0 = 0$$
und somit $s(x,y,z)\in A$.

Damit sind alle drei Eigenschaften erfüllt und A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Alternative: Aus **(d)** folgt direkt, dass A ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Dazu müssen wir nur sehen, dass
$$A = \left\{x\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle x \,|\, (1,3,5)\rangle = 0\right\}.$$
Dies ist exakt eine Menge von der Form in **(d)** mit $n=3$ und $Y = \{(1,3,5)\}$.

(b) Wir setzen $B := \left\{\binom{z_1}{z_2}\in\mathbb{C}^2 \,\middle|\, \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)\geqq 0\right\}$. Dann sind $\binom{1}{\mathrm{i}}$ und $\binom{-2}{0}$ in B, denn es gilt

$$\mathrm{Re}(1)\cdot\mathrm{Im}(\mathrm{i}) = 1\cdot 1 = 1 \geqq 0 \quad\text{und}\quad \mathrm{Re}(-2)\cdot\mathrm{Im}(0) = -2\cdot 0 = 0 \geqq 0.$$

Es gilt aber $\binom{1}{\mathrm{i}} + \binom{-2}{0} = \binom{-1}{\mathrm{i}} \notin B$, denn

$$\mathrm{Re}(-1)\cdot\mathrm{Im}(\mathrm{i}) = -1\cdot 1 = -1 < 0.$$

Damit kann B kein Untervektorraum sein.

(c) Wir setzen $C := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto a\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$ und nehmen an, dass die Nullfunktion $N\colon x \mapsto 0$ in C enthalten ist. Dann muss es ein $a \in \mathbb{R}$ geben mit $0 = a\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beispielsweise durch Einsetzen von $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$ sieht man schnell, dass es kein solches $a \in \mathbb{R}$ geben kann, ein Widerspruch. Damit enthält die Teilmenge C von $C^1(\mathbb{R})$ nicht die Nullfunktion und kann damit kein Untervektorraum sein.

(d) Wir setzen $D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x \,|\, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y\}$ und zeigen, dass dies ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Offenbar ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und wir müssen nur noch überprüfen, ob die drei definierenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Es ist $0 \in D$, denn es gilt $\langle 0 \,|\, y \rangle = 0 \cdot \langle 0 \,|\, y \rangle = 0$ für alle $y \in Y$.
- Seien $x, z \in D$ und $y \in Y$ beliebig. Dann gilt
$$\langle x + z \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, y \rangle + \langle z \,|\, y \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \text{und somit} \quad x + z \in D.$$
- Seien $x \in D$, $s \in \mathbb{R}$ und $y \in Y$ beliebig. Dann gilt
$$\langle sx \,|\, y \rangle = s \langle x \,|\, y \rangle = s \cdot 0 = 0 \quad \text{und somit} \quad sx \in D.$$

Damit ist D ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe H 34. *Orthogonalprojektion*

Sei U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Eine Abbildung $\pi\colon V \to V$ heißt Orthogonalprojektion auf U, falls für alle $u \in U$, alle $v, w \in V$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\pi(v) \in U, \quad \pi(sv + tw) = s\pi(v) + t\pi(w) \quad \text{und} \quad \langle v - \pi(v) \,|\, u \rangle = 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist π eine Orthogonalprojektion auf U, so gilt $\pi(\pi(w)) = \pi(w)$ für alle $w \in V$. *Hinweis:* Betrachten Sie $|\pi(w) - \pi(\pi(w))|^2$.

(b) Zeigen Sie: $\pi_x\colon v \mapsto \frac{\langle v | x \rangle}{|x|^2} x$ für $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ist eine Orthogonalprojektion auf den Untervektorraum $U_x = \left\{ ax \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$ von $\mathbb{R}^n$.

(c) Skizzieren Sie U_x, w, $\pi_x(w)$ und $\left\{ (1-t)w + t\pi_x(w) \;\middle|\; t \in [0,1] \right\}$ für $x = (4,2)$ und $w = (1,3)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $w \in V$ beliebig und setze $v := \pi(w)$. Dann gilt

$$|\pi(w) - \pi(\pi(w))|^2 = \langle \pi(w) - \pi(\pi(w)) \,|\, \pi(w) - \pi(\pi(w)) \rangle = \langle v - \pi(v) \,|\, \pi(w - v) \rangle = 0$$

wegen $\pi(w - v) \in U$. Daraus folgt $\pi(\pi(w)) = \pi(w)$.

(b) Offenbar gilt

$$\pi_x(v) = \underbrace{\frac{\langle v \,|\, x \rangle}{|x|^2}}_{\in \mathbb{R}} x \in U_x \quad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Weiter gilt für beliebige $v, w \in V$ und $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \pi_x(sv + tw) &= \frac{\langle sv + tw \,|\, x \rangle}{|x|^2} x = \frac{s \langle v \,|\, x \rangle + t \langle w \,|\, x \rangle}{|x|^2} x \\ &= s \cdot \frac{\langle v \,|\, x \rangle}{|x|^2} x + t \cdot \frac{\langle w \,|\, x \rangle}{|x|^2} x = s\pi_x(v) + t\pi_x(w). \end{aligned}$$

Schließlich gilt

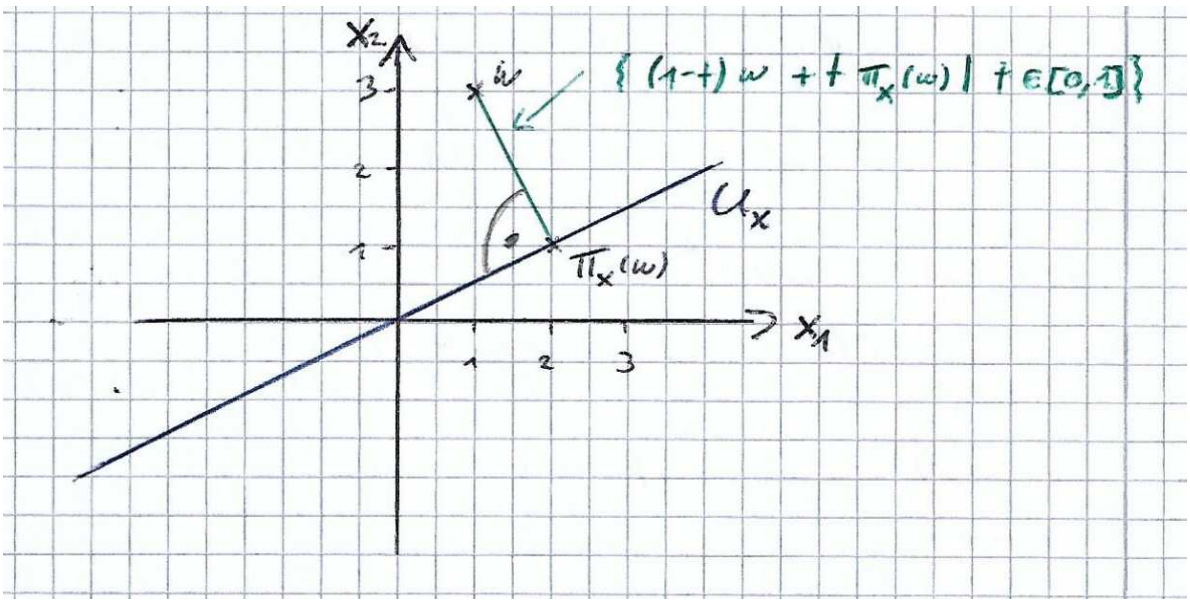
$$\langle v - \pi_x(v) \,|\, ax \rangle = a \langle v \,|\, x \rangle - a \left\langle \frac{\langle v \,|\, x \rangle}{|x|^2} x \,\middle|\, x \right\rangle = a \langle v \,|\, x \rangle - a \frac{\langle v \,|\, x \rangle}{|x|^2} \langle x \,|\, x \rangle$$
$$= a \langle v \,|\, x \rangle - a \langle v \,|\, x \rangle = 0$$

für alle $v \in V$ und alle $a \in \mathbb{R}$. Damit ist π_x eine Orthogonalprojektion auf U_x.

(c) Wir berechnen

$$|x|^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \quad \text{und} \quad \langle w \,|\, x \rangle = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10, \quad \text{also} \quad \pi_x(w) = \frac{10}{20}(4,2) = (2,1).$$

Damit kommen wir zu folgender Skizze:



Frischhaltebox

Aufgabe H 35. *Teilbarkeit und Induktion*

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ohne Rest durch 9 teilbar; das heißt es gibt ein $k_n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$.

Lösungshinweise hierzu: **IA** Wir zeigen die Aussage für $n = 0$: Es gilt

$$0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 1 + 2^3 = 9 = 9 \cdot 1 \quad \text{mit} \quad 1 \in \mathbb{N}_0.$$

IH Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h., es gelte

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n \quad \text{für ein} \quad k_n \in \mathbb{N}_0.$$

IS Wir zeigen die Aussage für $n+1$ unter Annahme der Induktionshypothese für n: Es gilt

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + ((n+1)+1)^3 + ((n+1)+2)^3 &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 - n^3 \\
&\overset{IH}{=} 9k_n + (n+3)(n^2 + 6n + 9) - n^3 \\
&= 9k_n + 6n^2 + 9n + 3n^2 + 18n + 27 \\
&= 9k_n + 9n^2 + 27n + 27 \\
&= 9(k_n + n^2 + 3n + 3) = 9k_{n+1}
\end{aligned}$$

mit $k_{n+1} := k_n + n^2 + 3n + 3 \in \mathbb{N}_0$. Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.