Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 36. *Lagrange-Polynome*

Wir betrachten die Abbildung

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \times \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon \langle p \,|\, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$$

und die Polynome

$$f_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad f_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$f_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad f_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ die Skalarprodukt-Eigenschaften 1,2,3 und 4 aus 3.5.1 erfüllt.

(b) Berechnen Sie $\langle f_j \,|\, f_i \rangle$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, 3\}$.

(c) Begründen Sie mit **(b)**, dass f_0, f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Seien $p, q, r \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten

1) $\langle p \,|\, q \rangle = \sum_{k=0}^{3} p(k)q(k) = \sum_{k=0}^{3} q(k)p(k) = \langle q \,|\, p \rangle$.

2) $\langle p \,|\, p \rangle = \sum_{k=0}^{3} p(k)^2 \geqq 0$ und $p = 0 \implies \langle p \,|\, p \rangle = 0$.

Die Umkehrung der zweiten Aussage ist etwas schwieriger. Sei dazu $\langle p \,|\, p \rangle = 0$. Dann gilt

$$0 = \underbrace{p(0)^2}_{\geqq 0} + \underbrace{p(1)^2}_{\geqq 0} + \underbrace{p(2)^2}_{\geqq 0} + \underbrace{p(3)^2}_{\geqq 0}, \quad \text{also} \quad p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0.$$

Das Polynom $p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ besitzt also 4 Nullstellen. Das geht aber nur, falls p das Nullpolynom ist. In der Tat, wäre $p \neq 0$ von Grad 3 und mit Leitkoeffizient $\alpha \neq 0$, dann folgt mit 1.8.8

$$p(X) = \alpha(X-0)(X-1)(X-2)$$

wegen den Nullstellen 0, 1, 2. Wir haben aber noch eine weitere Nullstelle bei 3 und somit folgt

$$0 = p(3) = \alpha(3-0)(3-1)(3-2) = 6\alpha \neq 0,$$

ein Widerspruch. Falls p Grad kleiner 3 hat, so führt dies genauso zu einem Widerspruch.

3)
$$\langle p \,|\, q + r \rangle = \sum_{k=0}^{3} p(k)(q(k) + r(k)) = \sum_{k=0}^{3} p(k)q(k) + \sum_{k=0}^{3} p(k)r(k) = \langle p \,|\, q \rangle + \langle p \,|\, r \rangle .$$

4)
$$s \langle p \,|\, q \rangle = s \sum_{k=0}^{3} p(k)q(k) = \sum_{k=0}^{3} (sp)(k)q(k) = \langle sp \,|\, q \rangle = \sum_{k=0}^{3} p(k)(sq)(k) = \langle p \,|\, sq \rangle .$$

Damit handelt es sich bei der Abbildung $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ tatsächlich um ein Skalarprodukt für $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$.

(b) Um etwas weniger zu rechnen, beobachten wir zuerst, dass gilt

$$f_j(k) = 0 \text{ für } k \neq j$$

und damit

$$\langle f_j \,|\, f_i \rangle = \sum_{k=0}^{3} f_j(k) f_i(k) = f_j(j) f_i(j) = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Es verbleiben

$$\begin{aligned}
\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle &= f_0(0)^2 = (-1)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^2 = 36, \\
\langle f_1 \,|\, f_1 \rangle &= f_1(1)^2 = 1^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-2)^2 = 4, \\
\langle f_2 \,|\, f_2 \rangle &= f_2(2)^2 = 2^2 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 = 4, \\
\langle f_3 \,|\, f_3 \rangle &= f_3(3)^2 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 36.
\end{aligned}$$

(c) Seien $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \,|\, f_0 \rangle \\
&= a_0 \langle f_0 \,|\, f_0 \rangle + a_1 \langle f_1 \,|\, f_0 \rangle + a_2 \langle f_2 \,|\, f_0 \rangle + a_3 \langle f_3 \,|\, f_0 \rangle = a_0 \langle f_0 \,|\, f_0 \rangle
\end{aligned}$$

und wegen $\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle \neq 0$ folgt $a_0 = 0$. Genauso folgen $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und somit sind f_0, f_1, f_2, f_3 linear unabhängig.

Aufgabe H 37. *Lagrange-Polynome 2*

Diese Aufgabe setzt **H 36** fort.

(a) Begründen Sie, dass $F\colon f_0, f_1, f_2, f_3$ eine Basis von $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ ist.

(b) Finden Sie ein Polynom $p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ so, dass $p(j) = 2^j$ für alle $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $p = \frac{\langle p \,|\, f_0 \rangle}{\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle} f_0 + \frac{\langle p \,|\, f_1 \rangle}{\langle f_1 \,|\, f_1 \rangle} f_1 + \frac{\langle p \,|\, f_2 \rangle}{\langle f_2 \,|\, f_2 \rangle} f_2 + \frac{\langle p \,|\, f_3 \rangle}{\langle f_3 \,|\, f_3 \rangle} f_3$ für alle $p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ gilt.

(d) Berechnen Sie ${}_F p$ für $p(X) = X^2 + X - 1$ mit Hilfe von **(c)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Da $\operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ Dimension 4 hat und f_0, f_1, f_2, f_3 linear unabhänging sind, ist F nach 3.7.16.3 eine Basis.

(b) Wir suchen ein Polynom $p \in \operatorname{Pol}_3 \mathbb{R}$ und stellen dieses in der Basis F dar: $p = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$. Es soll gelten

$$1 = 2^0 = p(0) = a_0 f_0(0) + a_1 f_1(0) + a_2 f_2(0) + a_3 f_3(0) = a_0 f_0(0) = a_0(-6),$$

also muss $a_0 = -\frac{1}{6}$ sein. Genauso bekommen wir

$$a_1 = \frac{2^1}{f_1(1)} = \frac{2}{2} = 1, \quad a_2 = \frac{2^2}{f_2(2)} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{2^3}{f_3(3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Damit ist das gesuchte Polynom $p(X) = -\frac{1}{6} f_0(X) + f_1(X) - 2 f_2(X) + \frac{4}{3} f_3(X)$. Wenn man möchte kann man dieses noch in der Monombasis $M : 1, X, X^2, X^3$ darstellen, aber die Darstellung in der Basis F ist informativer. In der Monombasis ist $p(X) = \frac{1}{6} X^3 + \frac{5}{6} X + 1$.

(c) Da F eine Basis ist, gibt es $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $p = a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\langle p \mid f_0 \rangle &= \langle a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \mid f_0 \rangle \\ &= a_0 \langle f_0 \mid f_0 \rangle + a_1 \langle f_1 \mid f_0 \rangle + a_2 \langle f_2 \mid f_0 \rangle + a_3 \langle f_3 \mid f_0 \rangle = a_0 \langle f_0 \mid f_0 \rangle\end{aligned}$$

und somit $a_0 = \frac{\langle p \mid f_0 \rangle}{\langle f_0 \mid f_0 \rangle}$. Genauso bekommt man $a_j = \frac{\langle p \mid f_j \rangle}{\langle f_j \mid f_j \rangle}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Wir rechnen nach

$$\begin{aligned}&\langle p \mid f_0 \rangle = p(0) f_0(0) = (-1) \cdot (-6) = 6, \quad \langle p \mid f_1 \rangle = p(1) f_1(1) = 1 \cdot 2 = 2, \\ &\langle p \mid f_2 \rangle = p(2) f_2(2) = 5 \cdot (-2) = -10 \, \langle p \mid f_3 \rangle = p(3) f_3(3) = 11 \cdot 6 = 66.\end{aligned}$$

Mit **(c)** und den Werten für $\langle f_j \mid f_j \rangle$ aus der vorherigen Aufgabe bekommen wir

$$_F p = \begin{pmatrix} \frac{\langle p \mid f_0 \rangle}{\langle f_0 \mid f_0 \rangle} \\ \frac{\langle p \mid f_1 \rangle}{\langle f_1 \mid f_1 \rangle} \\ \frac{\langle p \mid f_2 \rangle}{\langle f_2 \mid f_2 \rangle} \\ \frac{\langle p \mid f_3 \rangle}{\langle f_3 \mid f_3 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{36} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{-10}{4} \\ \frac{66}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -15 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 38. *Ebenen und Spiegelung*

Sei $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle n \mid x \rangle = d \right\}$ mit $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $d \geqq 0$ eine Ebene. $y \in \mathbb{R}^3$ heißt *Spiegelbild* von $x \in \mathbb{R}^3$ an E, falls $\frac{1}{2}(x + y) \in E$ und falls $x - y = \alpha n$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie: $x + 2tn$ ist das Spiegelbild von x an E, wenn $t \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $x + tn \in E$. Interpretieren diese Konstruktion eines Spiegelbildes geometrisch.

(b) Seien nun $n = \frac{1}{5}(4, 3, 0)$ und $d = 2$. Bestimmen Sie das Spiegelbild der Geraden $g = (1, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 1, 1)$ an E. Hier verstehen wir unter dem Spiegelbild die Menge

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \text{Es gibt ein } x \in g \text{ so, dass } y \text{ das Spiegelbild von } x \text{ an } E \text{ ist} \right\}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis benutzen, dass es sich bei diesem Spiegelbild wieder um eine Gerade handelt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir prüfen die geforderten Eigenschaften für $y := x + 2tn$.

- Es gilt $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x + x + 2tn) = x + tn \in E$ nach der Wahl von t.
- Es gilt $x - y = x - (x + 2tn) = -2tn = \alpha n$ mit $\alpha = -2t \in \mathbb{R}$.

Damit ist y das Spiegelbild von x an E.

Wir können t mit $x + tn \in E$ auch genauer angeben, denn letzteres bedeutet

$$d = \langle n \mid x + tn \rangle = \langle n \mid x \rangle + t|n|^2, \quad \text{also} \quad t = \frac{d - \langle n \mid x \rangle}{|n|^2}.$$

Geometrisch ist $x + tn$ der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden $x + \mathbb{R}n$ und $x + 2tn$ ist genau der Punkt auf dieser Geraden so, dass $x + tn$ der Mittelpunkt zwischen x und $x + 2tn$ ist.

(b) Da das Spiegelbild wieder eine Gerade ist, genügt es die Spiegelbilder von zwei Punkten auf g zu bestimmen. Wir wählen dazu $P_1 = (1,0,0)$ und $P_2 = (2,1,1)$. Wegen $|n| = 1$ berechnet sich das Spiegelbild von P_1 durch

$$\begin{aligned} Q_1 := P_1 + 2(2 - \langle n \,|\, P_1\rangle)n &= (1,0,0) + 2\left(2 - \frac{1}{5}4\right)\frac{1}{5}(4,3,0) \\ &= (1,0,0) + \frac{12}{25}(4,3,0) = \frac{1}{25}(73,36,0). \end{aligned}$$

Das Spiegelbild von P_2 ist auf ähnliche Weise gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_2 := P_2 + 2(2 - \langle n \,|\, P_2\rangle)n &= (2,1,1) + 2\left(2 - \frac{1}{5}11\right)\frac{1}{5}(4,3,0) \\ &= (2,1,1) - \frac{2}{25}(4,3,0) = \frac{1}{25}(42,19,25). \end{aligned}$$

Das gesuchte Spiegelbild ist dann gegeben durch $Q_1 + \mathbb{R}(Q_2 - Q_1)$.

Aufgabe H 39. *Ebenen und Schnitte*

Seien $E_1 = \big\{(0,1,0) + t(2,1,0) + s(3,4,1) \,\big|\, t,s \in \mathbb{R}\big\}$, $E_2 = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, \langle (1,0,3) \,|\, x\rangle = 2\big\}$ und $E_3 = \big\{x \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, \langle (1,1,4) \,|\, x\rangle = 5\big\}$. Bestimmen Sie $E_1 \cap E_2$, $E_2 \cap E_3$ und $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

Lösungshinweise hierzu:

$E_1 \cap E_2$**:** Ist $x \in E_1 \cap E_2$, so gibt es $t, s \in \mathbb{R}$ mit $x = (0,1,0) + t(2,1,0) + s(3,4,1)$ und es gilt $\langle (1,0,3) \,|\, x\rangle = 2$. Insbesondere gilt dann

$$2 = \langle (1,0,3) \,|\, (0,1,0) + t(2,1,0) + s(3,4,1)\rangle = 0 + t \cdot 2 + s \cdot 6, \quad \text{also} \quad t = 1 - 3s.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= (0,1,0) + t(2,1,0) + s(3,4,1) \\ &= (0,1,0) + (1-3s)(2,1,0) + s(3,4,1) \\ &= (2,2,0) + s(-3,1,1). \end{aligned}$$

Damit haben wir $E_1 \cap E_2 \subseteqq \big\{(2,2,0) + s(-3,1,1) \,\big|\, s \in \mathbb{R}\big\}$ gezeigt. "$\supseteqq$" folgt mit ähnlichen Argumenten.

$E_2 \cap E_3$**:** Ist $x \in E_2 \cap E_3$, so gilt $\langle (1,0,3) \,|\, x\rangle = 2$ und $\langle (1,1,4) \,|\, x\rangle = 5$. Wir haben also

$$x_1 + 3x_3 = 2 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 + 4x_3 = 5.$$

Wir setzen die erste in die zweite Gleichung ein und setzen $s := x_3$. Dann erhalten wir

$$x_2 = 5 - 4s - x_1 = 5 - 4s - (2 - 3s) = 3 - s \quad \text{und} \quad x_1 = 2 - 3s.$$

Damit haben wir $E_2 \cap E_3 \subseteqq \big\{(2,3,0) + s(-3,-1,1) \,\big|\, s \in \mathbb{R}\big\}$ gezeigt.

Für die Umkehrung sei nun $x = (2,3,0) + s(-3,-1,1)$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\langle (1,0,3) \,|\, x\rangle = 2 + s \cdot 0 = 2 \quad \text{und} \quad \langle (1,1,4) \,|\, x\rangle = (2+3) + t \cdot (-3-1+4) = 5$$

und somit $x \in E_2 \cap E_3$.

Alternativ kann man beispielsweise eine Richtung v für die Gerade $E_2 \cap E_3$ finden durch $v = (1,0,3) \times (1,1,4) = (-3,-1,1)$. Einen Punkt auf dieser Gerade findet man dann genau wie oben, aber man kann direkt mit $s = x_3 = 0$ rechnen (da wir die Richtung v schon berechnet haben).

$E_1 \cap E_2 \cap E_3$**:** Mit der vorherigen Rechnung ist

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \left\{(2,2,0) + s(-3,1,1) \,\middle|\, s \in \mathbb{R}\right\} \cap E_3.$$

Sei nun $x \in E_1 \cap E_2 \cap E_3$, dann ist also $x = (2,2,0) + s(-3,1,1)$ für ein $s \in \mathbb{R}$ und $\langle (1,1,4) \,|\, x \rangle = 5$. Ineinander einsetzen liefert

$$5 = \langle (1,1,4) \,|\, (2,2,0) + s(-3,1,1) \rangle = 4 + s \cdot (-3+1+4) = 4 + 2s, \quad \text{also} \quad s = \frac{1}{2}.$$

Damit haben wir $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \subseteqq \{(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})\}$ gezeigt. Die Umkehrung folgt auch direkt durch Einsetzen.

Frischhaltebox

Aufgabe H 40. *Summen*

Sei $n \in \mathbb{N}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\displaystyle\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+3}^{n+3}\left(\sum_{k=0}^{16}(j-i-2)\right)\right)$.

Lösungshinweise hierzu: Zuerst beobachten wir, dass die innersten Summanden nicht von k abhängen und machen eine Indexverschiebung bei der zweiten Summe:

$$\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+3}^{n+3}\sum_{k=0}^{16} j-i-2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+3}^{n+3} j-i-2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1-i} j =: \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}.$$

Nun gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j.$$

Jetzt benutzen wir 1.2.2 und 1.2.4 und bekommen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right) \\
&= n(n+1)\left(\frac{1}{12}(2n+1) + \frac{1}{4}\right) \\
&= n(n+1)(\frac{1}{6}n + \frac{4}{12}) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$