A. Aulbach, T. Holicki,
O. Dikan, Z. Askarpour,
L. Hellebrandt,
R. A. Lainez Reyes

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 41. *Gauß–Algorithmus*

Wir betrachten das folgende reelle lineare Gleichungssytem S :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 5x_5 &= 2 \end{aligned}$$

(a) Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix für S. Bringen Sie diese mit Hilfe des Gauß–Algorithmus in die in Satz 4.7.2 angegebene Form.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssytems S_H. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von S.

(c) Geben Sie die Lösungsmenge von S an. Verwenden Sie dazu **(b)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Die gesuchte Matrix ist

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 9 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right].$$

Wir wenden den Gauß–Algorithmus an:

$$= \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 9 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$$Z_1 + Z_3 : \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & 4 & 8 & 2 \end{array}\right]$$

$$4Z_2 + Z_3 : \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 0 & 20 & 14 \end{array}\right]$$

$$\tfrac{1}{17} Z_3 : \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{20}{17} & \frac{14}{17} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 + 4Z_3 : \\ Z_2 - 3Z_3 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 1 & 0 & -1 & \frac{131}{17} & \frac{56}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{9}{17} & \frac{9}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{20}{17} & \frac{14}{17} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_2 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{140}{17} & \frac{47}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{9}{17} & \frac{9}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{20}{17} & \frac{14}{17} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} -Z_1 : \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{140}{17} & -\frac{47}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{9}{17} & \frac{9}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{20}{17} & \frac{14}{17} \end{array}\right].$$

(b) Nach **(a)** und Satz 4.7.6 ist eine Basis des Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystems gegeben durch

$$B\colon v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{140}{17} \\ \frac{9}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 140 \\ 9 \\ -20 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung von S erhalten wir, indem wir $x_4 = x_5 = 0$ wählen. Dies liefert

$$v_{\mathsf{sp}} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -47 \\ 9 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = v_{\mathsf{sp}} + L(v_1, v_2)$.

Aufgabe H 42. *Weihnachtsbäckerei*

Sie wollen drei Plätzchensorten backen, die hauptsächlich die folgenden Zutaten benötigen.

Spitzbuben 35 Stk:	300g Mehl, 150g Zucker, 120g Butter, 1 Ei
Vanillekipferl 25 Stk:	250g Mehl, 10g Zucker, 125g gemahlene Mandeln, 250g Butter
Mürbeteigplätzchen 30 Stk:	200g Mehl, 50g Zucker, 100g Butter, 2 Eier.

In Ihrem Vorratsschrank und Kühlschrank finden Sie 2.5kg Mehl, 1kg Zucker, 1.35kg Butter, 10 Eier und 500g gemahlene Mandeln, sowie reichlich von allen übrigen nicht explizit genannten Zutaten. Wieviel Plätzchen von welcher Sorte können Sie damit maximal backen, wenn Sie die gesamte Butter und die Eier aufbrauchen wollen?

Hinweis: Stellen Sie zuerst mit den Informationen über die Butter und Eier ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses. Schließen Sie dann mit den Informationen über die übrigen Zutaten alle Lösungen aus, die nicht realisierbar sind. Insbesondere sollen nur ganze Plätzchen gebacken werden.

Lösungshinweise hierzu: Im folgenden sei S die Anzahl der Spitzbuben, V die Anzahl der Vanillekipferl und M die Anzahl der Mübeteigplätzchen. Da wir die Butter komplett verbrauchen wollen, ergibt sich aus den Rezepten die Gleichung

$$\frac{120}{35}S + \frac{250}{25}V + \frac{100}{30}M = 1350.$$

Genauso liefert der Bedarf an Eiern in den Rezepten die Gleichung

$$\frac{1}{35}S + 0V + \frac{2}{30}M = 10.$$

Die übrigen Zutaten wollen wir nicht exakt verbrauchen, aber wir können natürlich nicht mehr benutzen als wir tatsächlich haben. Damit ergeben sich folgende Ungleichungen:

- Mehl: $\frac{300}{35}S + \frac{250}{25}V + \frac{200}{30}M \leqq 2500$

- Zucker: $\frac{150}{35}S + \frac{10}{25}V + \frac{50}{30}M \leqq 1000$
- Mandeln: $\frac{125}{25}V \leqq 500$.

Wir ignorieren jetzt zuerst die Ungleichungen und basteln ein Gleichungssystem aus den Gleichungen. Dieses hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A\|b] = \left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right].$$

Zur Lösung verwenden wir nun Gauß:

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ \frac{120}{35} & \frac{250}{25} & \frac{100}{30} & 1350 \end{array}\right] \\
Z_2 - Z_1 120 : &\left[\begin{array}{ccc||c} \frac{1}{35} & 0 & \frac{2}{30} & 10 \\ 0 & \frac{250}{25} & -\frac{140}{30} & 150 \end{array}\right] \\
\begin{matrix} 35Z_1 : \\ Z_2\frac{1}{10} : \end{matrix} &\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & 350 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{15} & 15 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Alle Lösungen sind also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} S \\ V \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{7}{15} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Da wir nur ganze Plätzchen backen und auch keine negative Anzahl an Plätzchen backen können, machen für uns nur folgende Lösungen Sinn:

$$\begin{pmatrix} S \\ V \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -35 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \{0, \dots, 10\}.$$

Jetzt betrachten wir noch die Ungleichungen. Wegen den Mandeln ergibt sich

$$500 \geqq \frac{125}{25}V = \frac{125}{25}(15 + t7) = 75 + t35 \iff t \leqq \frac{425}{35} = \frac{85}{7} < 13$$

Dies liefert also keine neue Information da wir bereits wussten, dass $t \leqq 10$ gelten muss. Für den Zucker ergibt sich

$$\begin{aligned}
1000 &\geqq \frac{150}{35}S + \frac{10}{25}V + \frac{50}{30}M \\
&= \frac{150}{35}(350 - t35) + \frac{10}{25}(15 + t7) + \frac{50}{30}t15 \\
&= 1500 - 150t + 6 + \frac{14}{5}t + 25t = 1506 - \frac{611}{5}t,
\end{aligned}$$

also
$$t \geqq \frac{1506-100}{611/5} = 5\frac{506}{611} > 4.$$
Da t eine ganze Zahl sein muss, können wir daraus $t \geqq 5$ folgern. Für das Mehl ergibt sich
$$\begin{aligned} 2500 &\geqq \frac{300}{35}S + \frac{250}{25}V + \frac{200}{30}M \\ &= \frac{300}{35}(350 - t35) + \frac{250}{25}(15 + t7) + \frac{200}{30}t15 \\ &= 3000 - 300t + 150 + 70t + 100t = 3150 - 130t, \end{aligned}$$
also
$$t \geqq \frac{3150-2500}{130} = 5,$$
was wir aber schon wissen. Damit haben wir also insgesamt die folgenden 6 Möglichkeiten:

	Spitzbuben	Vanillekipferl	Mürbeteigblätzchen
t = 5	175	50	75
t = 6	140	57	90
t = 7	105	64	105
t = 8	70	71	120
t = 9	35	78	135
t = 10	0	85	150

Aufgabe H 43. *Etwas Kryptographie*
Bei dem ASCII Code wird jeden Zeichen aus dem standardisierten Zeichensatz
$$\Sigma := \{A,\ B,\ \ldots,\ Z,\ a,\ b,\ \ldots,\ z,\ @,\ \sim,\ [,\ ],\ \{,\ |,\ \},\ \ldots,\ \texttt{Del},\ \ldots\}$$
eine Zahl in 7 Bit Codierung zugeordnet. Der vollständige standardisierte Zeichensatz ist im Internet zu finden. Jede dieser Zahlen können wir auffassen als einen Vektor in $\mathbb{R}^7$ mit Einträgen aus $\{0,1\}$ und damit definiert die Zuordnung des Codes eine Abbildung $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{R}^7$. Diese Abbildung erfüllt beispielsweise
$$\begin{aligned} \psi(A) &= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(a) &= \begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}^\intercal, \\ &\ \vdots && \ \vdots \\ \psi(Z) &= \begin{pmatrix}1&0&1&1&0&1&0\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(z) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1&0\end{pmatrix}^\intercal, \\ \psi(\{) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1&1\end{pmatrix}^\intercal, & \psi(|) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}^\intercal, \\ \psi(\sim) &= \begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&0\end{pmatrix}^\intercal, & &\text{etc.} \end{aligned}$$
Nun definieren wir $\Sigma^* := \{a_1 \ldots a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \Sigma \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\}$, die Menge der endlich langen Wörter mit Buchstaben aus dem Alphabet Σ, und die bijektive Abbildung
$$\Psi\colon \Sigma^* \to \Psi(\Sigma^*)\colon\ \Psi(a_1 \ldots a_m) = \begin{pmatrix}\psi(a_1) & \ldots & \psi(a_m)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times m}.$$

Mit dieser Abbildung gilt beispielsweise

$$\Psi(Santa) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = Claus$$

Bestimmen Sie nun:

(a) $\Psi(Lebkuchen)$ und $\Psi(Plaetzchen)$.

(b) $\Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) $\Psi(Ho)^{\mathsf{T}}\Psi(ho)\Psi(ho)^{\mathsf{T}}$ und die Polarkoordinatendarstellung von $|\Psi(a)| + \mathrm{i}|\Psi(b)|$.

(d) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\Psi(Keks)^{\mathsf{T}}x = (1, 2, 3, 4)^{\mathsf{T}}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Ein Vergleich mit einer ASCII Tabelle liefert

$$\Psi(Lebkuchen) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi(Plaetzchen) = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ein weiterer Vergleich liefert

$$\Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}\right) = Hohoho \quad \text{und} \quad \Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0 \\ 1&1&0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}\right) = Geschenke.$$

(c) Es gilt

$$\Psi(Ho)^{\intercal}\Psi(ho)\Psi(ho)^{\intercal} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\intercal} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\intercal}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$|\Psi(a)| + \mathrm{i}|\Psi(b)| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| + \mathrm{i} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

und der Betrag dieser komplexen Zahl ist $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$. Damit gilt

$$|\Psi(a)| + \mathrm{i}|\Psi(b)| = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

(d) Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist

$$\left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Wir verwenden nun den Gauß–Algorithmus

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_4 \leftrightarrow Z_3: \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4: \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{r} \\ Z_2 - Z_1: \\ Z_3 - Z_2: \\ Z_4 - Z_2: \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{r} Z_1 - Z_4: \\ Z_2 + Z_4: \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0\\2\\2\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \;\middle|\; p,q,r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 44. *Etwas Kryptograhpie 2*

Einer unserer Wichtel hat uns die folgende verschlüsselte Nachricht zukommen lassen:

Gfhtzntz htlggq tlzt| dzptctz pdg vtbtz wdg |dz d| xltbgqtz gtxbtc bthdxqtz |∼tfhqt

Gtx|d Xdvtcx∼tr

Für die Entschlüsseln hat er uns den Hinweis gegeben, dass für die buchstabenweise Verschlüsselung die Abbildung Ψ aus **H 43** und eine Matrix aus $\mathbb{R}^{7\times 7}$ verwendet wurden. Außerdem wird das Wort Geschenk zu Vtgfhtzn verschlüsselt. Gehen Sie nun wie folgt vor:

(a) Seien $\mathcal{A} := \Psi(Vtgfhtzn)^{\mathsf{T}}$ und $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_7) = \Psi(Geschenk)^{\mathsf{T}}$. Bestimmen Sie ohne den Gauß–Algorithmus, für $i \in \{1, \ldots, 7\}$, eine Lösung $x_i \in \mathbb{R}^7$ des Gleichungssystems $\mathcal{A}x_i = b_i$.

Hinweis: Schauen Sie sich die Spalten von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genau an.

(b) Rechnen Sie nach, dass gilt

$$\mathcal{X}\Psi(Vtgfhtzn) = \Psi(Geschenk) \quad \text{für die Matrix} \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_1^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ x_7^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7\times 7}.$$

(c) Entschlüsseln Sie so viele Buchstaben der Nachricht mit Hilfe von $\mathcal{X}$, bis Sie die übrigen erraten können.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Zuerst bekommen wir durch einen Vergleich mit der ASCII Tabelle

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&1&1&1&0\\ 1&1&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Spalten von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ genau betrachten, stellen wir fest, dass

$$b_1 = a_1 = \mathcal{A}\mathrm{e}_1, \quad b_2 = a_2 = \mathcal{A}\mathrm{e}_2, \quad b_3 = a_7 = \mathcal{A}\mathrm{e}_7, \quad b_4 = a_4 = \mathcal{A}\mathrm{e}_4,$$
$$b_5 = a_3 = \mathcal{A}\mathrm{e}_3, \quad b_6 = a_6 = \mathcal{A}\mathrm{e}_6, \quad b_7 = a_5 = \mathcal{A}\mathrm{e}_5.$$

Hier sind wie üblich $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_7 \in \mathbb{R}^7$ die Standardbasisvekoren und die gesuchten Lösungen sind also

$$x_1 = \mathrm{e}_1, \quad x_2 = \mathrm{e}_2, \quad x_3 = \mathrm{e}_7, \quad x_4 = \mathrm{e}_4, \quad x_5 = \mathrm{e}_3, \quad x_6 = \mathrm{e}_6, \quad x_7 = \mathrm{e}_5.$$

(b) Wegen **(a)** gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{X}\Psi(Vtgfhtzn))^\intercal &= \Psi(Vtgfhtzn)^\intercal \mathcal{X}^\intercal \\ &= \mathcal{A}(x_1, \ldots, x_7) = (\mathcal{A}x_1, \ldots, \mathcal{A}x_7) \\ &= (b_1, \ldots, b_7) = \mathcal{B} = \Psi(Geschenk)^\intercal.\end{aligned}$$

Durch ein weiteres mal Transponieren folgt die Behauptung.

(c) Zur besseren Übersicht schreiben wir im folgenden verschlüsselte Buchstaben in braun und entschlüsselte in schwarz. Wir wissen schon mal, dass

$$V \to G, \quad t \to e, \quad g \to s, \quad f \to c, \quad h \to h, \quad z \to n, \quad n \to k,$$

bzw.

> Gchenken helggq elze| dnpecen pdg veben wdg |dn d| xlebgqen gexbec behdxqen |∼echqe
>
> Gex|d Xdvecx∼er

Mit **(b)** können wir die übrigen Buchstaben entschlüsseln. Es ist beispielsweise

$$\mathcal{X}\Psi(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Psi(i)$$

und

$$\mathcal{X}\Psi(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Psi(a).$$

Nachdem man dies für ein paar Buchstaben getan hat, kann man die übrigen erraten und erhält den folgenden Lösungstext:

> Schenken heisst einem anderen das geben was man am liebsten selber behalten moechte
>
> Selma Lagerloef

Frischhaltebox

Aufgabe H 45. *Ungleichungen*

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|2x+3| \geqq (x+1)^2$$

Lösungshinweise hierzu:
Wir betrachten zwei Fälle:

- $x > -\frac{3}{2}$: In diesem Fall lautet die Ungleichung
  $$0 \leqq 2x+3-(x+1)^2 = 2x+3-x^2-2x-1 = -x^2+2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqq 2,$$
  also $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- $x < -\frac{3}{2}$: In diesem Fall lautet die Ungleichung
  $$0 \leqq -(2x+3)-(x+1)^2 = -2x-3-x^2-2x-1 = -(x+2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)^2 \leqq 0,$$
  also $x = -2$.

Damit ist die Ungleichung erfüllt für alle $x \in \{-2\} \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.