Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 46. *Linearität*

Welche der nachfolgenden Abbildungen sind $\mathbb{K}$-linear?

(a) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(b) $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + \mathrm{i}b \to a - \mathrm{i}b$ für $a, b \in \mathbb{R}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

(c) $\gamma : \mathrm{Pol}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p'(1) + p(0)$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(d) $\varphi : \mathrm{Pol}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \mapsto p(0) + 1$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

(e) $\psi_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v \mid w \rangle$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und ein $w \in \mathbb{R}^n$.

Lösungshinweise hierzu: Wir prüfen alle Abbildung $\vartheta : V \to W$ auf Additivität $\vartheta(v+w) = \vartheta(v) + \vartheta(w)$ und skalare Multiplikativität $\vartheta(kv) = k\vartheta(v)$ für $v, w \in V$. (Dies kann auch in einem Schritt $\vartheta(v + kw) = \vartheta(v) + k\vartheta(w)$ gemacht werden).

(a) Sei $v := (a, b)^\intercal, w := (c, d)^\intercal$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(v + w) &= \alpha((a, b)^\intercal + (c, d)^\intercal) = \alpha((a + c, b + d)^\intercal) = (a + c, -b - d)^\intercal \\ &= (a, -b)^\intercal + (c, -d)^\intercal = \alpha((a, b)^\intercal) + \alpha((c, d)^\intercal) = \alpha(v) + \alpha(w). \end{aligned}$$

Des Weiteren ist

$$\alpha(kv) = \alpha(k(a, b)^\intercal) = \alpha((ka, kb)^\intercal) = (ka, -kb)^\intercal = k(a, -b)^\intercal = k\alpha((a, b)^\intercal) = k\alpha(v).$$

Somit ist α $\mathbb{R}$-linear.

(b) Die Abbildung ist nicht $\mathbb{C}$ linear (obwohl sie nach Teil (a) $\mathbb{R}$ linear ist.) Sei $v := a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $\beta(\mathrm{i}(a + \mathrm{i}b)) = \beta(-b + \mathrm{i}a)) = -b - \mathrm{i}a$, aber $\mathrm{i}\beta(a + \mathrm{i}b) = \mathrm{i}(a - \mathrm{i}b) = b + \mathrm{i}a$. Somit ist $\mathrm{i}\beta(v) \neq \beta(\mathrm{i}v)$ für $v \neq 0$, und die Abbildung nicht $\mathbb{C}$-linear.

(c) Seien $p, q \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist formales Ableiten von Polynomen linear. Des Weiteren ist laut Definition fÃ¼r Werte in Polynome einsetzen $(p + q)(r) = p(r) + q(r)$ sowie $(kp)(r) = kp(r)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \gamma(p + kq) &= (p + kq)'(1) + (p + kq)(0) = (p' + kq')(1) + p(0) + kq(0) \\ &= p'(1) + kq'(1) + p(0) + kq(0) = p'(1) + p(0) + kq'(1) + kq(0) \\ &= p'(1) + p(0) + k(q'(1) + q(0)) = \gamma(p) + k\gamma(q). \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung γ $\mathbb{R}$-linear.

(d) Sei $p = 1 \in \mathrm{Pol}_n\mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $2\varphi(p) = 2(p(0) + 1) = 2(1 + 1) = 4$, aber $\varphi(2p) = (2p)(0) + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 4$. Somit ist die Abbildung φ nicht $\mathbb{R}$-linear.

(e) Es seien $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\intercal, w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$, und $k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi_w(u + kv) &= \psi_w((u_1 + kv_1, u_2 + kv_2, \ldots, u_n + kv_n)^\intercal) \\ &= \langle (u_1 + kv_1, u_2 + kv_2, \ldots, u_n + kv_n)^\intercal \mid (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\intercal \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i + kv_i)w_i = \sum_{i=1}^{n} u_iw_i + kv_iw_i = \left(\sum_{i=1}^{n} u_iw_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} kv_iw_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_iw_i\right) + k\left(\sum_{i=1}^{n} v_iw_i\right) = \psi_w(u) + k\psi_w(v). \end{aligned}$$

Somit ist ψ_w $\mathbb{R}$-linear für alle $w \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe H 47. *Links und Rechtsinverse*
Bestimmen Sie den Rang der folgenden reellwertigen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jeweils ein Links- oder Rechtsinverses der Matrizen, vorausgesetzt diese existieren.

Lösungshinweise hierzu: Wir wissen, dass nicht quadratische Matrizen mit vollem Rang viele Rechts oder Linksinverse haben (aber nicht beide auf einmal). Wir bestimmen ein Rechtsinverses analog wie bei quadratischen Matrizen:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-2Z_1, Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2, Z_3-2Z_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 17 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Die Matrix hat vollen Rang 3. Wir können die rechte Seite zu einer Rechtsinversen von A erweitern:

$$A_r := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten alle Inversen indem wir zusätzlich die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystem $Ax = 0$ bestimmen. Diese ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -6\alpha \\ 4\alpha \\ \frac{-17}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alle Rechtsinverse von A erhalten wir, indem wir auf die Spalten von A_r beliebige Vektoren des Lösungsraumes addieren.
Für B bestimmen wir den Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ -3 & -10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-2Z_1, Z_4+3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3-Z_2, Z_4+2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen hier bereits dass der Rang 2 ist (wir könnten auch noch die 2. Zeile mit $\frac{1}{5}$ normieren, um die Standardform zu erhalten). Damit hat die Matrix keine Inverse.

Wir bestimmen den Rang von C direkt in der erweiterten Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_3, Z_1+2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-4Z_1, Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{3}Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-3Z_2, Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{4} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Somit hat C vollen Rang mit Inversem

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Die 2. und 3. Zeile von D sind linear unabhängig (da keine vielfachen von einander) wir bestimmen ein Inverses dieser Teilmatrix und erweitern dieses zu einem Linksinversen von D:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+2Z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Somit ist ein Linksinverses von D gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 48. *Invertierbarkeit, Kern, Bild*

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 9 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha & 2\alpha+6 & -\alpha+4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar? Bestimmen Sie für $\alpha = -5$ das Inverse von A. Bestimmen Sie für $\alpha = 6$ eine Basis vom Kern und eine Basis vom Bild von A.

Lösungshinweise hierzu: Wir bestimmen direkt die Inverse von A und müssen lediglich jene

α ausschliessen, bei welchen wir durch 0 teilen mit 0 ausräumen.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \alpha+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 2\alpha+6 & -\alpha+4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-4Z_1, Z_3-2Z_1, Z_4-Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & \alpha+5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 2\alpha+3 & -\alpha+6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-2Z_2, Z_4+(\alpha-1)Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+5 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha+6 & -\alpha+6 & -4\alpha+3 & \alpha-1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4+(\alpha-6)Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+5 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha-24 & 2\alpha-33 & -\alpha+11 & \alpha-6 & 1 \end{array}\right)$$

Die Nullstellen von $\alpha^2 - 2\alpha - 24$ sind 6 und -4. Somit hat A genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 6\}$ vollen Rang, und ist genau dann invertierbar. Für $\alpha = -5$ führen wir den erweiterten Gauss-algorithmus weiter.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -43 & 16 & -11 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1Z_2, \frac{1}{11}Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-43}{11} & \frac{16}{11} & -1 & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2, Z_2-3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-43}{11} & \frac{16}{11} & -1 & \frac{1}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+2Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-119}{11} & \frac{43}{11} & -2 & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -14 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-43}{11} & \frac{16}{11} & -1 & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

Somit ist das Inverse von A für $\alpha = -5$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{-119}{11} & \frac{43}{11} & -2 & \frac{2}{11} \\ -14 & 5 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{-43}{11} & \frac{16}{11} & -1 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 6$ ist der Kern von A gleich dem Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was durch Zeilenausräumen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

umgeformt werden kann. Der Kern dieser Matrix ist durch $\langle (2, 33, -11, 1)^{\intercal} \rangle$ gegeben.
Da die ersten 3 Spalten von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 9 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, und nach Dimensionformel **(4.8.17)** das Bild Dimension $4 - 1 = 3$ hat, ist eine Basis des Bildes durch $(1, 4, 2, 1)^{\intercal}, (1, 3, 0, 5)^{\intercal}, (3, 9, 1, 6)^{\intercal}$ gegeben.

Aufgabe H 49. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*
Gegeben seien die linearen Abbildungen $\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \colon (x, y)^{\intercal} \mapsto (2x+y, x, -y)^{\intercal}$, $\mathrm{id}_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon x \mapsto x$ und $\mathrm{id}_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon x \mapsto x$. Wir benutzen die Standardbasis E_2 und eine weitere Basis $B \colon b_1 := (2, 2)^{\intercal}$, $b_2 := (-1, 2)^{\intercal}$ von $\mathbb{R}^2$, sowie die Standardbasis E_3 und eine weitere Basis $C \colon c_1 := (1, 0, 1)^{\intercal}$, $c_2 := (0, 1, 1)^{\intercal}$, $c_3 := (2, 0, 0)^{\intercal}$ von $\mathbb{R}^3$.
Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{E_2}$, ${}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B$, ${}_{E_3}(\mathrm{id}_3)_C$, ${}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3}$ und ${}_C\alpha_B$.

Lösungshinweise hierzu: Für die ersten drei Darstellenden Matrizen sind die Vektoren der Bilder bereits die Koordinatenvektoren bezüglich der Standardbasen. Deshalb geben die Bilder der Basisvektoren von E_2, B und C die Spalten der beschreibenden Matrizen, welche gegeben sind durch

$$ {}_{E_3}\alpha_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; {}_{E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; {}_{E_3}(\mathrm{id}_3)_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Für die vierte beschreibende Matrix müssen wir die Einheitsvektoren in E_3 als Linearkombinationen der Basisvektoren von C schreiben:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0)^{\intercal} &= \frac{1}{2} c_3, \\ (0, 1, 0)^{\intercal} &= -c_1 + c_2 + \frac{1}{2} c_3, \\ (0, 0, 1)^{\intercal} &= c_1 - \frac{1}{2} c_3 \end{aligned}$$

Demnach ist die beschreibende Matrix gegeben durch

$$ {}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. $$

Die 5. beschreibende Matrix ergibt sich als Produkt

$$\begin{aligned} {}_C\alpha_B &= {}_C(\mathrm{id}_3)_{E_3E_3}\alpha_{E_2E_2}(\mathrm{id}_2)_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 50. *Kreuzprodukt*

Es seien

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $v \times w$ in Abhängigkeit von α. Wie muss α gewählt werden damit $\sin \sphericalangle(v, w) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt.

Lösungshinweise hierzu: Das Kreuzprodukt ist gegeben durch

$$v \times w = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 3 - 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 4 \cdot \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 5 \\ -4\alpha \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$(\sin \sphericalangle(v, w))^2 = \left(\frac{|v \times w|}{|v||w|} \right)^2 = \frac{9\alpha^2 + 25 + 16\alpha^2}{(1 + \alpha^2 + 4)(16 + 9)} = \frac{25\alpha^2 + 25}{25\alpha^2 + 125} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 5}$$

Die Gleichung $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+5} = (\sqrt{\frac{1}{3}})^2 = \frac{1}{3}$ nach α auflösen ergibt $\alpha^2 = 1$ und somit $\alpha \in \{-1, 1\}$.