Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 51. *Volumen und Determinanten*

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die Matrix A und die Vektoren u_α , v und w durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad u_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von u_α , v und w aufgespannten Spats.

(b) Berechnen Sie das Volumen des von Au_α , Av und Aw aufgespannten Spats.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Volumen des von Au_α , Av und Aw aufgespannten Spats gleich 65? Was ist das Volumen des von u_α , v und w aufgespannten Spats in diesem Fall?

(d) Berechnen Sie die Determinante von A. Wie hängen die in (a) und (b) berechneten Volumina mit der Determinante zusammen?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das gesuchte Volumen ist der Betrag des Spatproduktes der drei Vektoren. Das Spatprodukt ist

$$\langle u_\alpha \,|\, v \times w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -5\alpha.$$

Das Volumen des Spats ist also $5|\alpha|$.

(b) Wir berechnen die Bildvektoren unter der Matrix:

$$Au_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \qquad Av = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$Aw = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das orientierte Volumen dieses Spats ist

$$\langle Au_\alpha \,|\, Av \times Aw \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\alpha \\ 3\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 22 \\ 32 \\ 28 \end{pmatrix} \right\rangle = 130\alpha.$$

Das Volumen ist also $130|\alpha|$.

(c) Das Volumen ist $130|\alpha|$, daher muss $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ sein. In diesem Fall das orientierte Volumen des von u_α , v und w aufgespannten Spats ist $\pm\frac{5}{2}$, also das Volumen ist $\frac{5}{2}$.

(d) Wir verwenden mehrfach den Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-9-2) + 4(-1-0) = -26.$$

Die Determinante gibt den Faktor an, um den sich das Volumen des aufgespannten Spats bei Abbildung mit der Matrix ändert. Sei hier V_1 das orientierte Volumen aus Aufgabenteil (a) und V_2 jenes aus Aufgabenteil (b). Man sieht $V_2 = \det A \cdot V_1$ bzw. $130\alpha = (-26) \cdot (-5\alpha)$.

Aufgabe H 52. *Rechenregel für Determinanten*

Es seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 2 & 0 \\ 1 & t^2 & 6 & 3 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

(b) Berechnen Sie $\det(\frac{1}{3}A)$, $\det(A + B^\intercal)$ und $\det(A^{-1}B^3)$.

(c) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix C_t. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist C_t invertierbar?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir verwenden mehrfach den Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = -2\,(3 - 5 \cdot 6) = 54.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3(3-2) = -3.$$

(b) Es ist

$$\det\left(\frac{1}{3}A\right) = \frac{1}{3^4}|A| = \frac{54}{9^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Es ist

$$A + B^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\det(A+B^\mathsf{T}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} = -1\left(-2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 2\left((26+24)+(12-4)\right) = 2\cdot 58 = 116.$$

Bemerkung: $\det(A+B^\mathsf{T}) \neq \det A + \det B^\mathsf{T} = \det A + \det B = 54-3 = 51$.
Aus der Multiplikativität der Determinante folgt

$$\det(A^{-1}B^3) = \frac{1}{|A|}|B|^3 = \frac{(-3)^3}{54} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Es ist

$$|C_t| = \begin{vmatrix} t & 0 & 2 & 0 \\ 1 & t^2 & 6 & 3 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ t^3 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ t^2 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & t^2 & 3 \\ t^3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2t\begin{vmatrix} t^2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} t^2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -2t(4t^2-9) + t(4t^2-9) = t(2t-3)(2t+3).$$

Die Matrix C_t ist genau dann invertierbar, wenn $\det C_t \neq 0$. Daher ist C_t invertierbar für $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, \pm\frac{3}{2}\}$.

Aufgabe H 53. *Blockmatrizen*
Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Matrix $G_N \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ gegeben:

$$G_N = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,N} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N,N} \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad A_{n,m} = \begin{pmatrix} m^2+2m & 0 \\ n & \dfrac{1}{n^2+3n+2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(A_{5,5})$.

(b) Bestimmen Sie $\det(A_{n,n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie damit $\det(G_N)$.

(c) Für welche N ist $\det(2G_N) = \dfrac{512}{3}$?

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist

$$A_{5,5} = \begin{pmatrix} 25+10 & 0 \\ 5 & \frac{1}{25+15+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 5 & \frac{1}{42} \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\det(A_{5,5}) = 35\cdot\frac{1}{42} - 0 = \frac{5}{6}$.

(b) Es ist

$$|A_{n,n}| = \begin{vmatrix} n^2+2n & 0 \\ n & \dfrac{1}{n^2+3n+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n(n+2) & 0 \\ n & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{vmatrix} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1}.$$

G_N ist eine Block-Dreiecksmatrix, somit ist $\det(G_N) = \prod_{n=1}^{N} \det(A_{n,n})$ (siehe 4.13.8). Also haben wir

$$\det(G_N) = \prod_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} = \frac{N!}{(N+1)!} = \frac{1}{N+1}.$$

(c) Da die Matrix $G_N \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ ist, ist es $\det(2G_N) = 2^{2N}\det(G_N) = \frac{4^N}{N+1}$. Es ist klar, dass N nicht sehr groß sein kann und dass es größer als 2 ist. Wir prüfen also die Werte von $N \geqq 3$.

$N = 3$: $\det(2G_3) = \dfrac{4^3}{3+1} = \dfrac{64}{4} = 16 \neq \dfrac{512}{3}$.

$N = 4$: $\det(2G_4) = \dfrac{4^4}{4+1} = \dfrac{4\cdot 64}{5} = \dfrac{256}{5} \neq \dfrac{512}{3}$.

$N = 5$: $\det(2G_5) = \dfrac{4^5}{5+1} = \dfrac{4\cdot 256}{6} = \dfrac{512}{3}$.

Daher ist $N = 5$.

Aufgabe H 54. *Matrixnorm und Reihen*

(a) Prüfen Sie, ob die Matrixnorm von X kleiner 1 ist und bestimmen Sie, falls möglich, den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} X^j$ für jede der folgenden Matrizen X.

(i) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **(ii)** $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-j-1} \\ 0 & c^k \end{pmatrix} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j-1}$$

Hinweis: Verwenden Sie **(a)(ii)** und **(b)**.

Lösungshinweise hierzu:

(a) **(i)** Es ist

$$\begin{aligned}
||X|| = \sup_{v\in\mathbb{R}^2, |v|=1} |Xv| &= \sup\left\{ \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{5}v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} \right| \;\middle|\; -1 \leqq v_1 \leqq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \sqrt{\frac{1}{25}v_1^2 + 4v_1^2} \;\middle|\; -1 \leqq v_1 \leqq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ v_1\sqrt{\frac{1}{25} + 4} \;\middle|\; -1 \leqq v_1 \leqq 1 \right\} \\
&= \sqrt{\frac{1}{25} + 4} > 1.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung $||X|| < 1$ in 4.14.2 ist also nicht erfüllt. Trotzdem konvergiert die Reihe. Es ist leicht durch vollständiger Induktion* zu beweisen, dass

$$X^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^j} & 0 \\ \frac{2}{5^{j-1}} & 0 \end{pmatrix} \text{ für } j \in \mathbb{N}.$$

Also

$$\sum_{j=0}^{\infty} X^j = X^0 + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5^j} & 0 \\ \frac{2}{5}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{5^j} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\frac{1}{5}} & 0 \\ \frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

*Beweis durch Induktion

IA Die Aussage ist wahr für $j = 1$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5^1} & 0 \\ \frac{2}{5^{1-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

IH Die Aussage ist wahr für j.

IS Wir müssen zeigen, dass die Aussage für $j+1$ wahr ist, wenn sie für j wahr ist:

$$X^{j+1} = XX^j \overset{\text{IH}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5^j} & 0 \\ \frac{2}{5^{j-1}} & 0 \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^{j+1}} & 0 \\ \frac{2}{5^j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Behauptung für alle $j \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(ii) Es ist

$$
\begin{aligned}
||X|| = \sup_{v\in\mathbb{R}^2, |v|=1} |Xv| &= \sup_{-1\leqq v_2\leqq 1} \left\{ \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{3}v_2 \\ \frac{1}{2}v_2 \end{pmatrix} \right| \;\middle|\; v_1^2 = 1 - v_2^2 \right\} \\
&= \frac{1}{12} \sup_{-1\leqq v_2\leqq 1} \left\{ \left| \begin{pmatrix} 3v_1 + 4v_2 \\ 6v_2 \end{pmatrix} \right| \;\middle|\; v_1^2 = 1 - v_2^2 \right\} \\
&= \frac{1}{12} \sup_{-1\leqq v_2\leqq 1} \left\{ \sqrt{9v_1^2 + 24v_1v_2 + 16v_2^2 + 36v_2^2} \;\middle|\; v_1^2 = 1 - v_2^2 \right\} \\
&< \frac{\sqrt{9+24+16+36}}{12} = \frac{\sqrt{85}}{12} < \frac{10}{12} < 1.
\end{aligned}
$$

Nach 4.14.2 gilt $\sum_{j=0}^{\infty} X^j = (E_2 - X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(b) **IA** Die Aussage ist wahr für $k = 1$, denn es gilt

$$
\begin{pmatrix} a^1 & b\sum_{j=0}^{0} a^j c^{1-j-1} \\ 0 & c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ba^0c^0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.
$$

IH Die Aussage ist wahr für k.

IS Wir müssen zeigen, dass die Aussage für $k+1$ wahr ist, wenn sie für k wahr ist:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{k} &\overset{\text{IH}}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-j-1} \\ 0 & c^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{k+1} & b\left(c^k + a\sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-j-1}\right) \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
c^k + a\sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-j-1} = c^k + \sum_{j=0}^{k-1} a^{j+1} c^{k-(j+1)} = c^k + \sum_{m=1}^{k} a^m c^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} a^m c^{k-m}.
$$

Daher ist

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & b\sum_{j=0}^{(k+1)-1} a^j c^{(k+1)-j-1} \\ 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}.
$$

und damit ist die Behauptung für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(c) Wir setzen $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$ und $c = \frac{1}{2}$ in **(b)** und betrachten die Summe von $k = 0$ bis ∞, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^k \\
&\overset{\textbf{(b)}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k & \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k & \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix} \\
&\overset{\textbf{(a)(ii)}}{=} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daher ist die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j-1} = 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{3}.$$

Frischhaltebox

Aufgabe H 55. *Basen*

Gegeben seien die Basis B von $\mathbb{R}^5$ und die Vektoren v, e_3:

$$B: \quad b_1 := \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0\\3\\0\\2\\0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 5\\0\\3\\1\\0 \end{pmatrix}, b_5 := \begin{pmatrix} 4\\0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix}$$

$$v = (4,3,2,1,0)^\intercal, \qquad e_3 = (0,0,1,0,0)^\intercal.$$

Bestimmen Sie den Koordinatenvektoren ${}_Bv$, ${}_Be_3$ und ${}_B(v-2e_3)$.

Lösungshinweise hierzu:

Es ist $v = \begin{pmatrix} 4\\3\\2\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\3\\0\\2\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\\0\\2\\-1\\0 \end{pmatrix} = b_2 + b_5$. Daher ist ${}_Bv = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$.

Es ist $e_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0\\0 \end{pmatrix} = -b_1$. Daher ist ${}_Be_3 = \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$.

Es ist ${}_B(v-2e_3) = {}_Bv - 2\,{}_Be_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: B ist keine orthogonale Basis. Es ist beispielsweise $b_2 \cdot b_4 = 2 \neq 0$.