Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 56. *Lösungsverhalten von LGS*

Gegeben seien die Matrix $A(t) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und der Vektor $b(t) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & t-1 & 0 & t \\ 1 & 0 & t+3 & -3 \\ -2 & t-1 & t & -t+3 \end{pmatrix}, \ b(t) := \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

(a) Wenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren auf das Gleichungssystem $A(t)x = b(t)$ an (Dreiecksform genügt).

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix $A(t)$ sowie die Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $A(t)x = 0$.

(c) Für welche Werte von t ist das inhomogene Gleichungssystem $A(t)x = b(t)$ lösbar? Für welche t ist die Lösung nicht eindeutig?

(d) Bestimmen Sie für einen Wert von t aus (c) für welchen die Lösung nicht eindeutig ist die Lösungsmenge von $A(t)x = b(t)$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir wenden das Gaußsche Elimintationsverfahren auf die erweiterte Koeffizienten Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 0 & t-1 & 0 & t & -2 \\ 1 & 0 & t+3 & -3 & t+1 \\ -2 & t-1 & t & -t+3 & 2t-1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - Z_1, Z_4 + 2Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 0 & t-1 & 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t+2 & -1 & 1 \\ 0 & t-1 & t+2 & -t-1 & 4t-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 - Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 0 & t-1 & 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t+2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & t+2 & -2t-1 & 4t+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 0 & t-1 & 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t+2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2t & 4t \end{array}\right) := (A'(t) \mid b'(t))$$

(b) Auf Grund der Dimensionsformel summieren sich der Rang der Matrix mit der Dimension des Lösungsraumes des homogenen Gleichungssystems auf 4. Der Rang von $A(t)$ ist gleich dem Rang von $A'(t)$. Diese Matrix hat vollen Rang 4 wenn alle Diagonaleinträge ungleich 0 sind, und Rang 3 wenn einer der Diagonaleinträge 0 ist. Somit hat A Rang 3 wenn $t \in \{-2, 0, 1\}$ wodurch die Dimension des Lösungsraumes 1 ist, und A hat Rang 4 wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ mit trivialen Lösungsraum.

(c) Wenn A vollen Rang, ist die Matrix invertierbar. Dadurch gibt es genau eine Lösung, insbesondere ist das Gleichungssystem lösbar. Für $t \in \{-2, 0, 1\}$ gibt es entweder keine

Lösung, oder der Lösungsraum ist ein affiner Raum mit Dimension 1. Wir betrachten die umgeformte Erweiterte Koeffizienten Matrix aus Teil (a). Für $t = -2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4+4Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Betrachten wir die letzte Zeile sehen wir, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung hat. Für $t = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar, doch die Lösung ist nicht eindeutig. Für $t = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4+2Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Durch vertauschen von Zeilen und Spalten (der linken Seite) bringen wir die erweiterte Koeffizienten Matrix auf die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem ist lösbar, doch die Lösung ist nicht eindeutig.

(d) Sowohl $t = 0$ und $t = 1$ erfüllen die Anforderungen. Für $t = 0$: Wir formen weiter um

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1Z_2, \frac{1}{2}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine spezielle Lösung ist durch $(\frac{-1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0)^\mathsf{T}$ gegeben, während die Lösung des homogenen LGS durch $\{(\frac{3}{2}\alpha, 0, \frac{1}{2}\alpha, \alpha)^\mathsf{T} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ gegeben ist. Somit ist die Lösungsmenge von $A(0)x = b(0)$ gegeben durch $\{(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\alpha, 2, \frac{1}{2}(1+\alpha), \alpha)^\intercal \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Für $t = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_2, Z_1+2Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_1-\frac{1}{3}Z_3, \frac{1}{3}Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine spezielle Lösung ist durch $(\frac{-8}{3}, 0, \frac{-1}{3}, -2)^\intercal$ gegeben, während die Lösung des homogenen LGS durch $\{(0, \alpha, 0, 0)^\intercal \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ gegeben ist. Somit ist die Lösungsmenge von $A(1)x = b(1)$ gegeben durch $\{(\frac{-8}{3}, \alpha, \frac{-1}{3}, -2)^\intercal \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe H 57. *LGS*

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6},\ b := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Was ist der Rang von A und wie hängt dieser mit der Dimension des Lösungsraumes des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ zusammen?

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^6$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir lösen das lineare Gleichungssystem und bestimmen in Folge dessen den Rang von A:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_1, Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+Z_2, Z_4-2Z_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A vollen Rang 4 hat. Die Dimension des Lösungsraumes des homogenen LGS ist laut Dimensionsformel gleich der Differenz der Anzahl Spalten von A und dem Rang von A. Somit ist die Dimension $6 - 4 = 2$.

(b) Wir führen die Gauß-Eliminierung aus Teil (a) fort:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+Z_4, Z_2-Z_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-Z_2, \frac{1}{2}Z_3, -1Z_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Eine spezielle Lösung ist gegeben durch $(1,1,1,1,0,0)^\intercal$. Die Lösungsmenge des homogenen LGS ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\beta \\ -3\alpha \\ \frac{1}{2}\alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist die Lösungsmenge des inhomogenen LGS $Ax = b$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 1-3\alpha \\ 1+\frac{1}{2}\alpha - \beta \\ 1+\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe H 58. *Gram-Schmidt, Isometrie*

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, und der Vektorraum $U = \mathrm{L}(A_1, A_2, A_3)$ mit Skalarprodukt $\langle A \,|\, B \rangle_U = \mathrm{Sp}(A^\intercal B)$ (Definition 5.6.19) und $|A|_U = \sqrt{\langle A \,|\, A \rangle_U}$ für $A, B \in U$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Schmidt eine Orthonormalbasis von U.

Hinweis: Der Gram-Schmidt-Algorithmus funktioniert auch für Matrizen, wobei das innere Produkt für Vektoren durch das hier angegebene ersetzt wird.

(b) Sei $T \colon U \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, so dass

$$T(A_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad T(A_2) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T(A_3) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie β so, dass T eine Isometrie ist, also $|M_1 - M_2|_U = |T(M_1) - T(M_2)|$ für alle $M_1, M_2 \in U$ gilt.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Mit Gram-Schmidt:

Es ist
$$\langle A_1 \,|\, A_1 \rangle_U = \mathrm{Sp}\left(A_1^\intercal A_1\right) = \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$
also normieren wir
$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie nun
$$\begin{aligned}\tilde{B}_2 &= A_2 - \mathrm{Sp}(B_1^T A_2)B_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \mathrm{Sp}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Es ist
$$\left\langle \tilde{B}_2 \,\middle|\, \tilde{B}_2 \right\rangle_U = \mathrm{Sp}\left(\tilde{B}_2^\intercal \tilde{B}_2\right) = \frac{3}{2},$$
also normieren wir
$$B_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$
Das Verfahren liefert für den dritten Vektor:
$$\begin{aligned}\langle B_1 \,|\, A_3 \rangle_U &= \mathrm{Sp}(B_1^\intercal A_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} -1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle B_2 \,|\, A_3 \rangle_U &= \mathrm{Sp}(B_2^\intercal A_3) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\beta - \frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned}\tilde{B}_3 &= A_3 - \mathrm{Sp}(B_1^T A_3)B_1 - \mathrm{Sp}(B_2^T A_3)B_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(\beta+1) & 0 \\ -(\beta+1) & (\beta+1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Somit erhalten wir den 3. Vektor
$$\left\langle \tilde{B}_3 \,\middle|\, \tilde{B}_3 \right\rangle_U = \mathrm{Sp}\left(\tilde{B}_3^\intercal \tilde{B}_3\right) = \frac{1}{3}(\beta+1)^2,$$
so dass
$$B_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Orthonormalbasis ist
$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Sei $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix} \in U$, und a_1, a_2, a_3 so dass $M = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$. Vergleicht man beide Seiten dieser Gleichung, so ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

Lösen wir dies nach a_1, a_2 und a_3 auf ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta+1} \begin{pmatrix} \beta & -1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ -1 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} T(M) &= a_1T(A_1) + a_2T(A_2) + a_3T(A_3) \\ &= \frac{m_1\beta - m_2 + m_3}{\beta+1} \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{m_1\beta + m_2\beta + m_3}{\beta+1} \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{-m_1 - m_2 + m_3}{\beta+1} \frac{1}{\sqrt{\beta+1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\beta+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} m_1(1+\beta) \\ m_2(1+\beta) \\ 0 \\ m_3(1+\beta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und $|T(M)|^2 = \frac{1}{\beta+1}(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$. Da $|M|^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ ist, gilt $|T(M)| = |M|$ genau dann, wenn $\frac{1}{\sqrt{\beta+1}} = 1$, also für $\beta = 0$.

Aufgabe H 59. *Drehungen und Isometrien*

Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i, j \leqq 3$, und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a_{22} = 1$ bestimmen Sie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i, j \leqq 3$ so, dass A eine Drehung um einen Winkel $\varphi \in (0, \pi)$ ist. Bestimmen Sie außerdem φ.

(b) Bestimmen Sie anhand der Werte aus Teil (a) die Fixpunktmenge $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Ax = x\right\}$.

(c) Betrachten Sie $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $T(v) = Av+b$ für $v \in \mathbb{R}^3$. Für $a_{11} = a_{33}$, $a_{13} = -a_{31}$ und $a_{22} = 1$, bestimmen Sie $\left\{(a_{11}, a_{13}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, T \text{ ist eine Isometrie}\right\}$.

(d) Für $a_{11} = a_{33}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{11}^2 + a_{13}^2 = 1$ und $a_{22} = \alpha$ bestimmen Sie die Menge $\left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |Av| = |v|\right\}$.
Hinweis: Die Antwort ist von α abhängig.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Vergleiche mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $a_{33} = a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{13} = -\frac{1}{2}$, $a_{31} = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

(b) Lösen Sie $(A - I)x = 0$, mit $x^\intercal = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} - 2 + \frac{1}{\sqrt{3}-2} \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet $x_3 = 0$, und $x_1 = \frac{x_1}{2-\sqrt{3}} = 0$. Damit ist die Fixpunktmenge gegeben durch

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_3 = 0, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) T ist eine Isometrie, wenn $|T(u) - T(w)| = |A(u - v)| = |u - v|$ gilt. Wir lösen $|A(w)| = |w|$, wobei $w = u - v \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} Aw &= \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + a_{13}w_3 \\ w_2 \\ a_{31}w_1 + a_{33}w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + a_{13}w_3 \\ w_2 \\ -a_{13}w_1 + a_{11}w_3 \end{pmatrix}, \\ |Aw|^2 &= (a_{11}^2w_1^2 + 2a_{11}a_{13}w_1w_3 + a_{13}^2w_3^2) \\ &\quad + w_2^2 \\ &\quad + (a_{11}^2w_1^2 - 2a_{11}a_{13}w_1w_3 + a_{13}^2w_3^2) \\ &= (a_{11}^2 + a_{13}^2)w_1^2 + w_2^2 + (a_{11}^2 + a_{13}^2)w_3^2. \end{aligned}$$

Aus $|w|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$ folgt $a_{11}^2 + a_{13}^2 = 1$. Daher ist T eine Isometrie für

$$\left\{a_{11}, a_{13} \in \mathbb{R} \,\middle|\, a_{11}^2 + a_{13}^2 = 1\right\}.$$

(d) Sei $v^\intercal = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |Av|^2 &= a_{11}^2v_1^2 + 2a_{11}a_{13}v_1v_3 + a_{13}^2v_3^2 \\ &\quad + \alpha^2v_2^2 \\ &\quad + a_{13}^2v_1^2 - 2a_{11}a_{13}v_1v_3 + a_{11}^2v_3^2 \\ &= v_1^2 + \alpha^2v_2^2 + v_3^2, \\ |v|^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha = \pm 1$, ist die gesuchte Menge der ganze $\mathbb{R}^3$, ansonsten ist sie $\left\{ v \in \mathbb{R} \,\middle|\, v_2 = 0 \right\}$.

Frischhaltebox

Aufgabe H 60. *Nullstellen von Polynomfunktionen*

Bestimmen Sie alle Nullstellen folgender Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto p(z)$.

(a) $p_1(z) := z^4 + 2z^3 - z - 2$

(b) $p_2(z) := z^2 + (2+2\mathrm{i})z + 2\mathrm{i} + 1$

Hinweis: Die Mitternachtsformel kann auch für Polynome über $\mathbb{C}$ angewendet werden.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Einsetzen der ganzzahligen Teiler von 2 liefert die Nullstellen -2 und 1. Polynomdivision ergibt $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z-1)(z+2)(z^2+z+1)$. Die Mitternachtsformel liefert die Nullstellen $-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, -\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ für den dritten Faktor.

(b) Die Mitternachtsformel (oder ähnliche Methoden) liefert die Nullstellen $-1-\mathrm{i}+\sqrt{(-1-\mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i} - 1} = -1 - \mathrm{i} + \sqrt{2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 1} = -1$, $-1 - \mathrm{i} - \sqrt{(1+\mathrm{i})^2 - 2\mathrm{i} - 1} = -1 - 2\mathrm{i}$.