Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 61. *Konjugierte Matrizen*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 32 & 12 \\ -19 & 4 & 28 & -12 \\ -10 & -14 & 1 & 6 \\ 18 & -18 & 9 & 36 \end{pmatrix},$$

und die Orthogonale Matrix

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob B konjugiert zu A.

(b) Sei

$$b^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Loesung des lineare Gleichungssystems $Ay = c$, wobei $c = Tb$.

(ii) Bestimmen Sie die Loesung des lineare Gleichungssystems $Bx = b$.
Hinweis: Sei $y = Tx$ in (i).

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das T ist orthogonal ist, gilt $T^{\mathsf{T}} = T^{-1}$.

$$\begin{aligned} T^{\mathsf{T}} A T &= T^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 12 \\ -7 & -2 & 10 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 32 & 12 \\ -19 & 4 & 28 & -12 \\ -10 & -14 & 1 & 6 \\ 18 & -18 & 9 & 36 \end{pmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

(b) **(i)**

$$c = Tb = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen $Ay = c$ durch direkte Inspektion: Durch Beobachtung

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Es ist

$$Bx = T^t ATx = T^\intercal ATx = b \Rightarrow TT^\intercal ATx = Tb \Rightarrow ATx = Tb = c.$$

Daher ist $Tx = y$ und somit $x = T^{-1}y = T^t y$,

$$\begin{aligned} x = T^\intercal y &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^\intercal. \end{aligned}$$

Aufgabe H 62. *Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren*

Geben die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, B eine $(n \times n)$-reelle Matrix mit Eigenwerte $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ und die entsprechende Eigenvektoren $u = v + iw$, mit $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie Bv und Bw bezuglich a, b, v und w.

(c) Sei

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+i)$ und $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$, und die entsprechende Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \overline{u_2}.$$

Schreiben Sie $\lambda_2 = a_2 + b_2 i$, $u_2 = v_2 + w_2 i$, und sei $T = [u_1 \quad v_2 \quad w_2]$, die Matrix mit den Spalten u_1, v_2 und w_2. Mit Hilfe des vorherigen Teils, bestimmen Sie Q, so dass $CT = TQ$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen die charakteristisches Polynom von A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda\right)+\frac{1}{5}\right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)^2-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda\right)^2+\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Jetzt lösen wir $\det(A-\lambda I)=0$:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda\right)^2-\frac{1}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \sqrt{2}, \\
\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\lambda\right)^2+\frac{1}{5}\right) &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}(2+i), \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-i).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenvektoren: wir lösen $A-\lambda I=0$ für jede Eigenwerte.

- Mit $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

  Die Eigenraum ist

$$\left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \setminus 0 \right\}.$$

- Mit $\lambda = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2-\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{10} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\sqrt{10} \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2-\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15-4\sqrt{10}}{2-\sqrt{10}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Eigenraum ist

$$\left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \setminus 0 \right\}.$$

- Mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}(2+i)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}(2+i) & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}(2+i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}i} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_{22} = \sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}i - \frac{5}{\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}i} \neq 0.$$

Die Eigenraum ist

$$\left\{ c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \setminus 0 \right\}.$$

- Mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-i)$, könnten wir lösen $A - \frac{1}{\sqrt{5}}(2-i)I = 0$, aber das ist nicht nötig, da A eine reelle Matrix und nach Lemma 6.1.9 $\bar{v} = \overline{(0,0,i,1)}^{\mathsf{T}}$ ein Eigenvektor von $\bar{\lambda} = \overline{\frac{1}{\sqrt{5}}(2+i)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2-i)$ ist. Deshalb die Eigenraum ist

$$\left\{ c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \setminus 0 \right\}.$$

(b) Für Eogemwerte $\lambda = a + ib$ und Eigenvektor $e = v + iw$ gilt

$$B(v + iw) = (a + ib)(v + iw) = av - bw + i(bv + aw),$$

so dass

$$Bv = av - bw$$
$$Bw = bv + aw.$$

(c) $CT = [Cu_1 \quad Cv_2 \quad Cw_2] = [\lambda_1 u_1 \quad a_2 v_2 - b_2 w_2 \quad a_2 v_2 + b_2 w_2]$, oder

$$CT = [u_1 \quad v_2 \quad w_2] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & -b_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

so dass

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe H 63. *Koordinatensyteme*

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ affine Koordinatensysteme und $\mathbb{E}$ das Standdardkoordinatensystem. Gegeben seien die Punkte

$$_{\mathbb{E}}P = (\,1\;\;0\;\;-1\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{E}}Q = (\,-3\;\;4\;\;-2\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{E}}R = (\,-7\;\;2\;\;-1\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{E}}S = (\,-5\;\;4\;\;-1\,)^{\intercal},$$
$$_{\mathbb{G}}P = (\,0\;\;0\;\;0\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{G}}Q = (\,1\;\;0\;\;1\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{G}}R = (\,2\;\;0\;\;0\,)^{\intercal},\quad _{\mathbb{G}}S = (\,1\;\;-1\;\;1\,)^{\intercal},$$

sowie die Koordinatentransformation $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ und $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}}$.

(b) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} v.$ und $_{\mathbb{G}}\tilde{P} = (1,2,1)^{\intercal}$. Bestimmen Sie $\alpha(_{\mathbb{G}}\tilde{P})$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Sei $\mathbb{F} = \{b_{\mathbb{F}}; f_1, f_2, f_3\}$, $\mathbb{G} = \{b_{\mathbb{G}}, g_1, g_2, g_3\}$, $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}} = Fv + b_{\mathbb{F}}$, $_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}} = Gv + b_{\mathbb{G}}$.

- Wir haben $_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} = F^{-1}v - F^{-1}b_{\mathbb{F}}$, mit

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad -F^{-1}b_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Daher ist

$$F = \begin{pmatrix} 10 & \frac{1}{2} & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}, b_{\mathbb{F}} = -F^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

  Wir erhalten f_1, f_2, f_3 aus den Spalten von F:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $v \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, schreiben wir $v = c_1g_1 + c_2g_2 + c_3g_3 + b_{\mathbb{G}}$. Wann $v =_{\mathbb{E}} P$,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = {_{\mathbb{G}}P}.$$

  Dann $_{\mathbb{E}}P = 0g_1 + 0g_2 + 0g_3 + b_{\mathbb{G}}$, so dass

$$b_{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich haben wir

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbb{E}}R &= \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2g_1 + 0g_2 + 0g_3 + b_{\mathbb{G}} \Rightarrow g_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{E}}Q &= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 1g_1 + 0g_2 + 1g_3 + b_{\mathbb{G}} \Rightarrow g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
{}_{\mathbb{E}}S &= \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1g_1 - g_2 + g_3 + b_{\mathbb{G}} \Rightarrow g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

- Durch den Vorschlag **5.7.9**, ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}} = {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}} \circ {}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$,

$$
\begin{aligned}
({}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{G}})v &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 4 & 8 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ 28 & -20 & 4 \\ -16 & 9 & -9 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Sei ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) = Gv + b_{\mathbb{G}}$, mit $G = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]$. Daher ist

$$
\tilde{P} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix},
$$

und

$$
\alpha(\tilde{P}_{\mathbb{G}}) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe H 64. *Eigenvektoren, Diagonalisierbare Matrizen und Funktionen*

Gegeben sei Matrix

$$
A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

(a) Bestimmen Sie (λ_i, u_i), $i = 1, 2, 3$, die Eigenwerte und Einheitsnorm-Eigenvektoren von A, mit $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$.

(b) Sei T die Matrix mit den Spalten u_1, u_2, u_3, in dieser Reihenfolge, und D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in dieser Reihenfolge, in der Diagonale. Überprüfen Sie $A = TDT^\intercal$.

(i) Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^6 + x^5 + x$. Bestimmen Sie $p(A)$.
Hinweis: Es ist $A = TDT^\intercal$.

(ii) Sei $B = I - A$, $S(n) = \sum_{k=0}^{n} A^k$ und $S = \lim_{n\to\infty} S(n)$. Bestimmen Sie BS.
Hinweis: P47 oder Teleskopsumme.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir bestimmen die Eigenpolynom von A:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-\lambda)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)(-\lambda) + \frac{1}{2}(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

Jetzt lösen wir es $\det(A - \lambda I) = 0$, und wir bekommen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Jetzt berechnen wir die Eigenwerte:

- Mit $\lambda = -\frac{1}{2}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungmenge ist

$$\left\{ (v_1, v_2, v_3) \;\middle|\; v_1 = -v_3, v_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Mit $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Lösungmenge ist

$$\left\{ (v_1, v_2, v_3) \;\middle|\; v_1 = v_3, v_2 = 0 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$(\lambda_1, u_1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$(\lambda_2, u_2) = \left(-\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$(\lambda_3, u_3) = \left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Wir haben

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Durch Aufgabe P47(a) wissen wir, dass $A^n = TD^nT^\intercal$,

$$D^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix},$$

somit $p(A) = A^6 + A^5 + A = T(D^6 + D^5 + D)T^\intercal$. Daher ist

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{33}{64} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{33}{64} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{35}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 34 \\ 0 & -33 & 0 \\ 34 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Es ist (siehe P47(b))

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} A^k = T \sum_{k=0}^{n} D^k T^t = T \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \lambda_3^k \end{pmatrix} T^\intercal.$$

Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
d_1(n) &:= \sum_{k=0}^{n} \lambda_1^k = \frac{1-\lambda_1^{n+1}}{1-\lambda_1} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),\\
d_2(n) &:= \sum_{k=0}^{n} \lambda_2^k = \frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),\\
d_3(n) &:= \sum_{k=0}^{n} \lambda_3^k = \frac{1-\lambda_3^{n+1}}{1-\lambda_3} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Dann

$$
\begin{aligned}
S(n) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1(n) & 0 & 0\\ 0 & d_2(n) & 0\\ 0 & 0 & d_3(n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} d_1(n)+d_3(n) & 0 & -d_1(n)+d_3(n)\\ 0 & 2d_2(n) & 0\\ -d_1(n)+d_3(n) & 0 & d_1(n)+d_3(n)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen die Grenzwerte:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} d_1(n) = \lim_{n\to\infty} d_2(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2}{3},\\
&\lim_{n\to\infty} d_3(n) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Dann

$$
S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & \frac{4}{3}\\ 0 & \frac{4}{3} & 0\\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{8}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.
$$

Schliesslich berechnen wir

$$
BS = (I-A)S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.
$$

Alternativ Wir haben

$$\begin{aligned}
BS = (I-A)S &= (I-A)\lim_{n\to\infty} S(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (I-A)S(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (I-A)A^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k - A^{k+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} I - A^{n+1} \\
&= I - \lim_{n\to\infty} A^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} D^{n+1} &= \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist es $\lim_{n\to\infty} A^{n+1} = 0$, so dass $BS = I$ gilt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 65. *Komplexe Zahlen und Teleskopsumme*

Sei $z_1 = \frac{i}{2}$ und $z_2 = 1 + i$.

(a) Bestimmen Sie
$$\sum_{k=0}^{n} z_1^k.$$

(b) Bestimmen Sie
$$\sum_{k=3}^{15} \left(\frac{1}{z_2^2 + 2k} - \frac{1}{2 + z_2^2 + 2k} \right).$$

Schreiben Sie Ihre Antwort in das Formular $\frac{a}{b+ic} + \frac{d}{e+if}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a)
$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - k^{k+1} = 1 - z^{k+1},$$

daher
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z_1^{k+1}}{1-z}.$$

Wenn $z = z_1 = \frac{i}{2}$
$$\frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}(4+2i),$$

und
$$\sum_{k=0}^{n} z_1^k = \frac{1}{5}(4+2i)\left(1 - \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\right).$$

(b) Teleskopsumme:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{15} \left(\frac{1}{z_2^2 - 2k} - \frac{1}{2 + z_2^2 - 2k} \right) &= -\sum_{k=3}^{15} \left(\frac{1}{z_2^2 + 2(k+1)} - \frac{1}{z_2^2 + 2k} \right) \\
&= -\frac{1}{z_2^2 + 32} + \frac{1}{z_2^2 + 6} \\
&= \frac{1}{2i+6} - \frac{1}{2i+32}
\end{aligned}$$