J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

M. Stroppel

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 101.

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^4-12x^2+3}{x^5-4x^3+3x-435}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir stellen fest, dass der Zähler $5x^4-12x^2+3$ des Integranten die Ableitung des Nenners $x^5-4x^3+3x-435$ des Integraten ist. Ferner stellen wir fest, dass der Nenner des Integranten für $x\in[0,1]$ nicht verschwindet, da $|x^5-4x^3+3x|\leqq 8\leqq|-435|$. Folglich gilt nach Beispiel 3.3.6

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5x^4-12x^2+3}{x^5-4x^3+3x-435}\,\mathrm{d}\,x &= \left[\ln\left(|x^5-4x^3+3x-435|\right)\right]_{x=0}^1\\ &= \ln\left(|-435|\right)-\ln\left(|-435|\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Wir nutzen die Linearität des Integrals

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x = \int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x + \int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

Und betrachten die beiden Integrale auf der rechten Seite separat. Das zweite Integral Lösen wir analog zu Teil (a) als

$$\int_2^3 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{d}\,x = \Big[\ln\left(|\ln x|\right)\Big]_{x=2}^3 = \ln(\ln 3)-\ln(\ln 2).$$

Das erste Integral Lösen wir mittels Lemma 3.4.9. Zunächst stellen wir fest, dass in der Notation von loc. cit. $\Delta=1$ gilt. Einmalige Anwendung des 2. Teils von 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}\,x &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x + \left[\frac{x}{4(x^2+1)^2}\right]_2^3\\ &= \frac{3}{4}\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{3}{400}-\frac{1}{50}\\ &= \frac{3}{4}\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{80}\end{aligned}$$

Erneute Anwendung des 2. Teils von 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x + \left[\frac{x}{2(x^2+1)}\right]_2^3\\ &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral können wir mit dem 1. Teil von 3.4.9 lösen. Wir haben

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)} \,\mathrm{d}\,x = [\arctan x]_2^3 = \arctan 3 - \arctan 2.$$

Zussammensetzen liefert nun

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^2+1)^3} + \frac{1}{x\ln(x)} \,\mathrm{d}\,x = \frac{3}{8}(\arctan 3 - \arctan 2) - \frac{1}{20} + \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2).$$

Aufgabe H 102. *Partialbruchzerlegung*

Geben Sie eine Partialbruchzerlegung der folgenden gebrochen rationalen Funktionen an.

(a) $\frac{3-x}{1-x^2}$ **(b)** $\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2}$ **(c)** $\frac{x^2+x+1}{x^5+2x^3+x}$ **(d)** $\frac{2x}{x^2-1}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Das Nennerpolynom hat größeren Grad als das Zählerpolynom, also müssen wir keine Polynomdivision durchführen. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sehen wir, dass $1-x^2$ die Nullstellen 1 und -1 hat. Also gilt $1-x^2 = -(x-1)(x+1)$. Nach 3.4.5 müssen wir

$$\frac{3-x}{1-x^2} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A_{1,1}}{x-1} + \frac{A_{2,1}}{x+1}$$

lösen, was nach Multiplikation mit $(x-1)(x+1)$ äquivalent dazu ist die Gleichung

$$x-3 = (x+1)A_{1,1} + (x-1)A_{2,1}$$

für $A_{1,1}, A_{1,2} \in \mathbb{R}$ zu lösen. Einsetzen von $x=1$ bzw. $x=-1$ liefert

$$-2 = 2A_{1,1} \text{ bzw. } -4 = -2A_{2,1}$$

das heißt $A_{1,1} = -1$ und $A_{2,1} = 2$. Insgesammt also

$$\frac{3-x}{1-x^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

(b) Dass Nennerpolynom in der Faktorisierten Form, die man am Ende von 3.4.3 erhält, da $2^2 - 4\cdot 2 < 0$, d.h. x^2+2x+2 keine reellen Nullstellen hat. Wir machen den Ansatz

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{B_{1,1}+C_{1,1}x}{x^2+2x+2} + \frac{B_{1,2}+C_{1,2}x}{(x^2+2x+2)^2}$$

nach 3.4.5, der nach Multiplikation mit $(x^2+x+2)^2$ äquivialent zu

$$x^3 = (B_{1,1}+C_{1,1}x)(x^2+2x+2) + B_{1,2} + C_{1,2}x$$

ist. Ausmultiplizieren liefert eine Gleichung

$$x^3 = C_{1,1}x^3 + (2C_{1,1}+B_{1,1})x^2 + (2C_{1,1}+2B_{1,1}+C_{1,2})x + 2B_{1,1} + B_{1,2}$$

welche durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1 &= C_{1,1} \\
0 &= 2C_{1,1} + B_{1,1} \\
0 &= 2C_{1,1} + 2B_{1,1} + C_{1,2} \\
0 &= 2B_{1,1} + B_{1,2}
\end{aligned}$$

liefert. Dieses Gleichungssystem können wir direkt (von Oben nach Unten durch einsetzen) durch

$$1 = C_{1,1} \qquad -2 = B_{1,1} \qquad 2 = C_{1,2} \qquad 4 = B_{1,2}.$$

lösen. Insgesammt also

$$\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2+x}{x^2+2x+2} + \frac{4+2x}{(x^2+2x+2)^2}.$$

(c) Offenbar $x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1)$. Um x^4+2x^2+1 weiter wie in 3.4.3 zu zerlegen setzen wir $x^2 = u$ und erhalten $x^4+2x^2+1 = u^2+2u+1$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen sehen wir, dass u^2+2u+1 die doppelte Nullstelle $u = -1$ hat, d.h. $u^2+2u+1 = (u+1)^2$. Dies liefert also $x^4+2x^2+1 = (u+1)^2 = (x^2+1)^2$, was die Zerlegung in 3.4.3 ist, da x^2+1 keine reelle Nullstelle hat. Man sieht sofort $x^2+x+1 = x+(x^2+1)$, womit wir

$$\frac{x^2+x+1}{x^4+2x+1} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

erhalten. Dies ist die gesuchte Partialbruchzerlegung, es die in 3.4.5 gewünschte Form hat.

(d) Es ist $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ analog zu (a) und wir haben wieder den Ansatz

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{A_{1,1}}{x-1} + \frac{A_{2,1}}{x+1}.$$

Also müssen wir

$$2x = (x+1)A_{1,1} + (x-1)A_{2,1}$$

lösen. Analog zu (a) liefert Evaluation an $x = 1$ bzw. $x = -1$

$$1 = A_{1,1} \text{ bzw. } 1 = A_{2,1}$$

also

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Aufgabe H 103. *Integration gebrochen rationaler Funktionen*
Berechnen Sie eine Stammfunktion der gebrochen rationalen Funktion

$$f\colon [1,2] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Polynomdivision (mit Rest) von x^3+2x^2+2x+2 durch x^3+x^2+x+1 ergibt

$$\frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} + 1.$$

Es ist bekannt, dass eine Stammfunktion von 1 durch x gegeben ist. Um den zweiten Term auf der Rechten Seite zu integieren nutzen wir Partialbruchzerlegung.

Aus der Präsenzübung ist bekannt, dass $x=-1$ eine Nullstelle von x^3+x^2+x+1 ist. (Alternativ können alle Ganzzahlige Nullstellen mittels 1.8.10 des HM1 Skripts erraten werden.) Polynomdivision $(x^3+x^2+x+1):(x+1)$ ergibt das Polynom x^2+1, das keine reellen Nullstellen hat. Daher gilt $(x^3+x^2+x+1)=(x+1)(x^2+1)$ und wir machen nach 3.4.5 den Ansatz

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_{1,1}}{x+1} + \frac{B_{2,1}+C_{2,1}x}{x^2+1}.$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner $(x+1)(x^2+1)$ ergibt

$$x^2+x+1 = (x^2+1)A_{1,1} + (x+1)(B_{2,1}+C_{2,1}x).$$

Einsetzen von $x=-1$ ergibt $1=2A_{1,1}$, d.h. $A_{1,1}=\frac{1}{2}$. Einsetzen von $x=0$ liefert $1=\frac{1}{2}+B_{2,1}$, d.h. auch $B_{2,1}=\frac{1}{2}$ Einsetzen von $x=1$ liefert nun $3=1+1+2C_{2,1}$, d.h. auch $C_{2,1}=\frac{1}{2}$. Insgesamt haben wir also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{x^2+1}.$$

Damit gilt für die Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{1+x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x,\end{aligned}$$

Wobei der letzte Umformungsschritt dazu dient die Integrale auf Interale aus Lemmata 3.4.7, 3.4.8 und 3.4.9 zurückzuführen. Direktes einsetzen der Formeln aus Lemmata 3.4.7, 3.4.8 und 3.4.9 liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x &= \cdots \\ \cdots = \frac{1}{2}\big[\ln|x+1|\big] + \frac{1}{2}\big[\arctan(x)\big] + \frac{1}{4}\big[\ln|x^2+1|\big].\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$F\colon [1,2]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln|x^2+1|$$

ist *eine* Stammfunktion von f.

Aufgabe H 104. *Ein Kriterium für die Konvergenz von Reihen*

Es sei $f_n\colon [1,n+1]\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \frac{1}{x^2}$ für $n\in\mathbb{N}$

(a) Begründen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \overline{S}(f_n, P_n) \qquad \underline{S}(f_n, P_n) = \overline{S}(f_n, P_n) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

für die Ober- und Untersumme von f_n zur Partition $P_n = \{1, \dots, n+1\}$ gilt.

(b) Begründen Sie warum

$$\int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x + 1$$

gilt und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Begründen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gegen einen Grenzwert in $[1, 2]$ konvergiert.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Nach Definition gilt

$$\overline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[k,k+1]} \big(f_n(x)\big) \cdot (k+1-k)$$

und da f_n monoton fallend ist vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\overline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f_n(k) \cdot (k+1-k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Aus dem gleichen Grund gilt für die Untersumme

$$\underline{S}(f_n, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in[k,k+1]} \big(f_n(x)\big) \cdot (k+1-k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Indexverschiebung $k = l - 1$ ergibt

$$\underline{S}(f_n, P_n) = \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} = \overline{S}(f_n, P_n) - 1 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b) Es gilt stets

$$\underline{S}(f_n, P_n) \leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq \overline{S}(f_n, P_n)$$

Das heist Einsetzen der Ausdrücke aus dem ersten Teil der Aufgabe liefert

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Dies zeigt die Linke zu zeigende Ungleichung. Da $0 \leqq \frac{1}{(n+1)^2}$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(n+1)^2} \leqq \int_1^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

was die rechte zu zeigende Ungleichung nach Addition von 1 impliziert.
Es ist

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

(c) Es sind

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{und} \qquad \int_0^{n+1} f_n(x)\,\mathrm{d}\,x + 1 = 2 - \frac{1}{n+1}$$

monoton wachsend in $n \in \mathbb{N}$. Nach der Ungleichung im zweiten Teil der Aufgabe ist damit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ wachsend und beschränkt durch 2. Damit konvergiert $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ und Übergang zum Limes $n \to \infty$ in der Ungleichung im zweiten Teil der Aufgabe liefert, dass der Grenzwert zwischen 1 und 2 liegt.

Frischhaltebox

Aufgabe H 105.
Berechnen und vereinfachen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \arctan(x)$ mit Hilfe von Satz 2.3.1 im Skript.

Lösungshinweise hierzu: Die Funktion $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist unendlich oft stetig differenzierbar und bijektiv. Die Ableitung $\tan' = 1 + \tan^2$ wird außerdem nicht 0 auf dem Definitionsbereich. Nach Satz 2.3.1 gilt für die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \arctan(y)\Big|_{y=\tan(x_0)} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \tan(x)\big|_{x=x_0}} = \frac{1}{1 + \tan(x_0)^2}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Insbesondere für $x_0 = \arctan(y_0)$ also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} \arctan(y)\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$