J. Joussen,
C. Klapproth,
R. A. Lainez Reyes,
R. Schmähl

22. Gruppenübung zur Vorlesung

Höhere Mathematik 2

M. Stroppel

Sommersemester 2024

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 106. *Geschlossene Formeln*

Berechnen Sie geschlossene Formeln für die folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$

Tipp: Führen Sie einen Sanity-check durch, d.h. überprüfen Sie beispielsweise durch Einsetzen, dass Ihre geschlossene Formel für $x=0$ korrekt ist.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir faktorisieren $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$, etwa durch Bestimmung der Nullstellen (Lösungsformel für gemischt quadratische Gleichungen). Wir berechnen

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\int(n+1)(n+2)x^n\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+C$$

und auf die gleiche Weise

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+C\right)\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}+Cx+D.$$

Nach dem Hauptsatz gilt damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}^2\,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}+Cx+D\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n$$

für jede Wahl von $C,D\in\mathbb{R}$. Insbesondere gilt dies für $C=D=1$. Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}^2\,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}+x+1\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}^2\,x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}^2\,x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

nach Indexshift $n+2=k$ unter Verwendung der geschlossenen Formel der geometrischen Reihe. Damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

die gesuchte geschlossene Formel.

(b) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{2}{n}x^n\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=2\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{2}{1-x}$$

nach Indexshift $n=k+1$ unter Verwendung der geschlossenen Formel der geometrischen Reihe. Also ist die gesuchte geschlossene Formel eine Stammfunction von $\frac{2}{1-x}$ und damit von der Form

$$\int\frac{2}{1-x}\,\mathrm{d}\,x=-2\ln(|1-x|)+C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen C. Es muss gelten

$$C = -2\ln(|1-0|) + C \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot 0^n = 0,$$

da die beiden Formel insbesondere für $x = 0$ übereinstimmen müssen. Die gesuchte geschlossene Formel ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n = -2\ln(|1-x|).$$

Aufgabe H 107. *Majoranten- und Grenzwertkriterium*

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}\, x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{\sin(x)} \,\mathrm{d}\, x$

(c) $\displaystyle\int_{20}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x^{24}))^3} \,\mathrm{d}\, x$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \,\mathrm{d}\, x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $x\mathrm{e}^{-x}$ eine Majorante für $\ln(x)\mathrm{e}^{-x}$ auf $[1, \infty)$, da $\ln(x) \leqq x$. Aus dem Majoranten-Kriterium und Beispiel 3.7.12 folgt die Konvergenz von

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{e^x} \,\mathrm{d}\, x.$$

(b) Nach L'Hôspitals Regel gilt

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{-\sin x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Damit haben

$$\int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{\sin x} \,\mathrm{d}\, x \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^{0-0} \frac{-1}{x} \,\mathrm{d}\, x = -\int_{-1}^{0-0} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

das gleiche Konvergenzverhalten dank des Grenzwertkriteriums. Völlig analog zu Beispiel 3.7.9 zeigt man, dass letzteres Integral nicht konvergiert.

(c) Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x^{24}))^3}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \to +\infty} 3\frac{(\ln(x))^2}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \to +\infty} 6\frac{\ln(x)}{x} = 24^3 \cdot \lim_{x \to +\infty} 6\frac{1}{x} = 0$$

durch dreimalige Anwendung von L'Hôspitals Regel. Nach dem Grenzwertkriterium würde aus der Konvergenz des Integrals aus der Aufgabenstellung die Konvergenz von

$$\int_{20}^{+\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x$$

folgen. Dies ist erneut nach Beispiel 3.7.8 nicht der Fall, also konvergiert das Integral aus der Aufgabenstellung nicht.

(d) Es gilt erneut

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

und daher hat das Integral aus der Aufgabenstellung das gleiche Konvergenzverhalten wie das Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x$$

welches nach 3.7.8 nicht konvergiert.

Aufgabe H 108. *Uneigentliche Integrale*

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es ist $x^2-1=(x-1)(x+1)$, etwa durch Bestimmung der Nullstellen. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty} \int_2^y \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}\,x &= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \int_2^y -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}\,x \right) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2} \left(-\ln(|y+1|) + \ln(3) + \ln(|y-1|) - \ln(1) \right) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{|y-1|}{|y+1|} \right) + \ln(3) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln\left(\lim_{y\to+\infty} \frac{|y-1|}{|y+1|} \right) + \ln(3) \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln(3).
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\lim_{\varepsilon\to0+0} \int_\varepsilon^1 \ln(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon\to0+0} \left[x\ln(x) - x \right]_{x=\varepsilon}^1 = (1\cdot\ln(1)-1) - (0-0) = 1$$

wobei man den Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to0+0} \varepsilon\ln(\varepsilon)$ etwa in Beispiel 2.5.8 findet.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}\,x + \frac{x}{2(x^2+1)}\\ &= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

mittels Lemma 3.4.9. Daher

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan(y) - \frac{1}{2}\arctan(0) + \frac{y}{2(y^2+1)} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

durch Einsetzen der Genzen in die oben berechnete Stammfunktion.

(d) Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad N. Es gilt

$$\int_0^y \frac{p(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = -\left[\frac{p(x)}{\mathrm{e}^x}\right]_{x=0}^y + \int_0^y \frac{p'(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x \qquad (*)$$

für alle $y \geqq 0$ dank partieller Integration. Da jedes Polynom eine Summe von Monomen ist und dank Beispiel 3.7.12 existiert der Grenzwert $y \to +\infty$ auf beiden Seiten. Da

$$\lim_{y\to\infty} y^k \mathrm{e}^{-y} = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt auch $\lim\limits_{y\to\infty} p(y)\mathrm{e}^{-y} = 0$. Der Grenzwert $y \to +\infty$ in $(*)$ liefert

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = p(0) + \int_0^{+\infty} \frac{p'(x)}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Induktion liefert nun

$$\int_0^{+\infty} \frac{p(x)}{e^x}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}^k\,x} p(x)\bigg|_{x=0},$$

da die $(N+1)$-te Ableitung von $p(x)$ verschwindet. Der Spezialfall $p(x) = x^4$ liefert

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{e^x}\,\mathrm{d}\,x = 4!.$$

Aufgabe H 109. *Geschlossene Formeln II (2+1+1)*
Geben Sie geschlossene Formeln für die folgenden Ausdrücke an.

(a) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} n^2 x^n$ **(b)** $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1}$ **(c)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir können diese Aufgabe analog zu Aufgabe H 106 lösen. Wir stellen einen leicht anderen Lösungsweg vor. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2\,x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Weiter gilt

$$n^2 = (n^2+3n+2) - (3n+3) + 1 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1$$

und daher haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{x^2-x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Da wir nicht bei $n = 0$ sondern bei $n = 5$ beginnnen zu summieren können wir die ersten fünf Summanden der Reihe subtrahieren um

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} n^2 x^n &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3} - 1 - x - 4x^2 - 9x^3 - 16x^4 \\
&= \frac{-16x^7 + 39x^6 - 25x^5 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

zu erhalten.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8\right) \\
&= x\left(\cos(x) - 1 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8\right)
\end{aligned}$$

nach Definition des Cosinus (Definition 1.14.17).

(c) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n - 1 - x^2\\ &= \mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2\end{aligned}$$

nach Definition der Exponentialfunktion (Definition 1.14.10).

Frischhaltebox

Aufgabe H 110.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^{2024}.

Lösungshinweise hierzu: Wir sehen, dass die Matrix A genau die Matrix ist, die die Rekursion der Fibonacci-Folge beschreibt, siehe 6.5.1 im HM1 Skript. In loc. cit. wurde berechnet, dass

$$A = \frac{1}{8\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1+\sqrt{5}\\ -2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

gilt. Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1+\sqrt{5}\\ -2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\sqrt{5} & 0\\ 0 & 4\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}A^{2024} &= \left(\frac{1}{8\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1+\sqrt{5}\\ -2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}\right)^{2024}\\
&= \frac{(4\sqrt{5})^{2023}}{(8\sqrt{5})^{2024}}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}^{2024}\begin{pmatrix}2 & -1+\sqrt{5}\\ -2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2^{2023}\cdot 8\sqrt{5}}\begin{pmatrix}(1+\sqrt{5})^{2025} & (1-\sqrt{5})^{2025}\\ 2(1+\sqrt{5})^{2024} & 2(1-\sqrt{5})^{2024}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1+\sqrt{5}\\ -2 & 1+\sqrt{5}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2^{2026}\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2(1+\sqrt{5})^{2025} - 2(1-\sqrt{5})^{2025} & 4(1+\sqrt{5})^{2024} - 4(1-\sqrt{5})^{2024}\\ 4(1+\sqrt{5})^{2024} - 4(1-\sqrt{5})^{2024} & 8(1+\sqrt{5})^{2023} - 8(1-\sqrt{5})^{2023}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{(1+\sqrt{5})^{2025}-(1-\sqrt{5})^{2025}}{2^{2025}\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})^{2024}-(1-\sqrt{5})^{2024}}{2^{2024}\sqrt{5}}\\ \frac{(1+\sqrt{5})^{2024}-(1-\sqrt{5})^{2024}}{2^{2024}\sqrt{5}} & \frac{(1+\sqrt{5})^{2023}-(1-\sqrt{5})^{2023}}{2^{2023}\sqrt{5}}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}F_{2025} & F_{2024}\\ F_{2024} & F_{2023}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei $F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ die n-te Fibonacci-Zahl ist.