## Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

**Aufgabe H 111.** *Topologie*

Wir betrachten die Menge

$$M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leqq 6 \right\},$$

**(a)** Skizzieren Sie die Menge $M$.

**(b)** Bestimmen Sie $\overline{M}$ und $M^\circ$ und $\partial M$.

**(c)** Untersuchen Sie, ob $M$ beschränkt ist.

**(d)** Untersuchen Sie, ob $M$ kompakt ist.

**Lösungshinweise hierzu:**

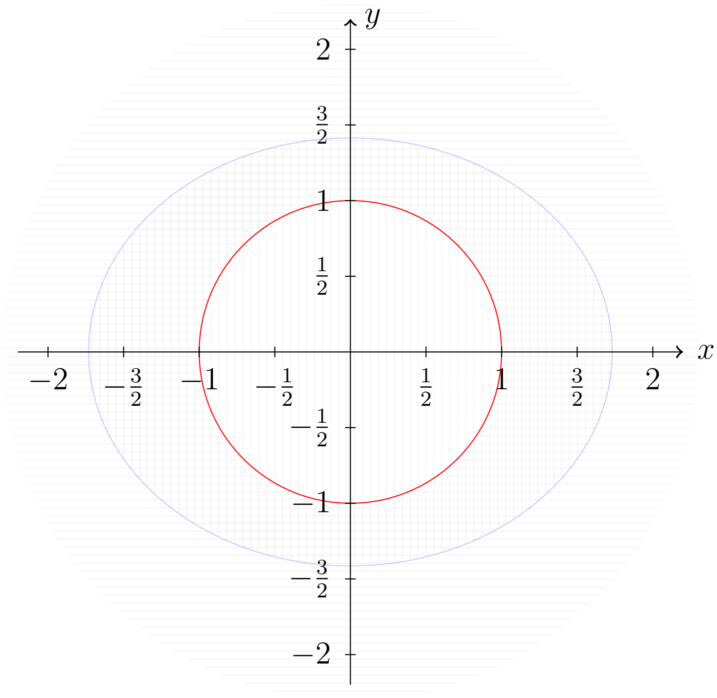
**(a)** Die Menge

$$M_1 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \right\},$$

ist durch die Fortsetzung des horizontal schraffierten Bereichs ohne die rote Linie ins Unendliche gegeben (dies ist das Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius 1). Die Menge

$$M_2 = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 \leqq 6 \right\}$$

ist durch den vertikal schaffierten Bereich einschließlich der blauen Linie gegeben (dies ist eine Ellipse mit großer Halbachse $\sqrt{3}$ und kleiner Halbachse $\sqrt{2}$). Die Menge $M$ ist der Durchschnitt der beiden Mengen, also der karierte (d.h. horizontal und vertikal schraffierte) Bereich mit der blauen Linie und ohne die rote Linie.



**(b)** Es ist
$$\overline{M} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 \leqq 6 \right\}$$
(dies ist der karierte Bereich einschließlich der blauen und der roten Linie) und
$$M^\circ = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \text{ und } 2x^2 + 3y^2 < 6 \right\}$$
(dies ist der karierte Bereich ohne die blaue und rote Linie). Daher ist
$$\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = x^2 + y^2 \text{ oder } 2x^2 + 3y^2 = 6 \right\}$$
(dies ist die rote und die blaue Linie).

**(c)** Die Menge $M$ ist beschränkt, da $|\binom{x}{y}|^2 = x^2 + y^2 \leqq 2x^2 + 3y^2 \leqq 6$ für alle $\binom{x}{y} \in M$.

**(d)** Die Menge $M$ ist nicht abgeschlossen, da $\overline{M} \neq M$. Nach dem Satz von Heine–Borel ist $M$ daher auch nicht kompakt, da Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu Beschränktheit *und* Abgeschlossenheit ist.

**Aufgabe H 112.** *Funktionen mehrerer Veränderlicher I: Warm-up*

Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2,2] \times [-2,2] \to \mathbb{R}, (x,y)^\mathsf{T} \mapsto \frac{x^2+1}{y^2+1}$

**(a)** Ist $f$ stetig? Nimmt $f$ ein globales Maximum an?

**(b)** Skizzieren Sie die Niveaulinien $N_t$ von $f$ für $t = \frac{1}{2}, 1, 2$

**(c)** Begründen Sie, warum sich Niveaulinen $N_t$ und $N_s$ für $t \neq s$ niemals schneiden.

**(d)** Skizzieren Sie den Schnitt des Graphen $\Gamma(f)$ mit der Ebene $E\colon x = 2y$.

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Da $f$ eine gebrochen rationale Funktion ist, ist $f$ auf dem gesamten Definitionsbereich stetig. (Da der Nenner nicht verschwindet ist dies der gesamte Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$, dies wird aber bereits durch die Aufgabenstellung impliziert.) Da der Definitionsbereich von $f$ kompakt ist und $f$ stetig ist, nimmt $f$ ein globales Maximum an.

**(b)** Für $t \geqq 1$ ist die Niveaulinie von $f$ zum Niveau $t$ ist gegeben durch alle Punkte $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit
$$\frac{x^2+1}{y^2+1} = t \iff x^2 = t(y^2+1) - 1 \iff x = \pm\sqrt{t(y^2+1)-1}$$
da $ty^2 + (t-1) \geqq 0$. Für $0 < t \leqq 1$ ist die Niveaulinie von $f$ zum Niveau $t$ ist gegeben durch alle Punkte $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit
$$\frac{x^2+1}{y^2+1} = t \iff y^2 = \frac{1}{t}(x^2+1) - 1 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{t}(x^2+1)-1}$$
da $\frac{1}{t}x^2 + (\frac{1}{t} - 1) \geqq 0$. Einsetzen der Werte $t \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ liefert Abbildung 3.

**(c)** Falls $\emptyset \neq N_t \cap N_s$, dann gibt es ein $\binom{x}{y} \in N_t \cap N_s$. Es folgt $t = f\left(\binom{x}{y}\right) = s$ nach Definition von $N_t$ bzw. $N_s$ und damit $t = s$. Nach Kontraposition folgt damit aus $t \neq s$, dass $\emptyset = N_t \cap N_s$. (Anschaulich, die Funktion $f$ kann nicht gleichzeitig den Wert $t$ und $s$ and der gleichen Stelle annehmen, wenn $t \neq s$.)

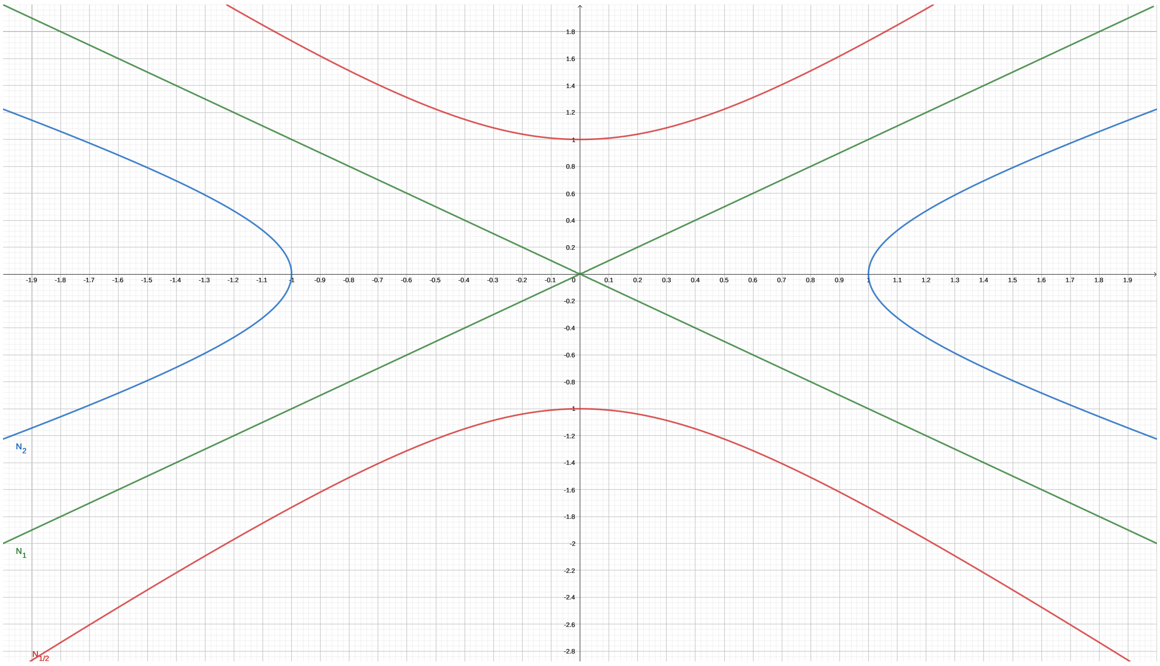



Abbildung 3: Niveaulinien

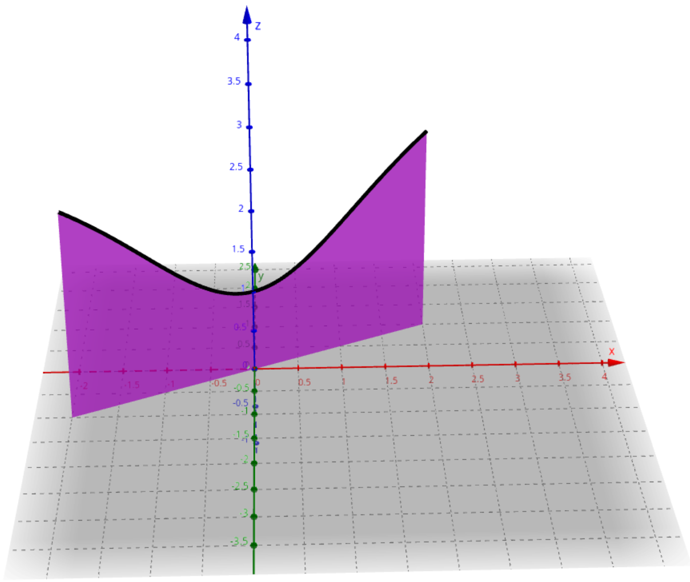



Abbildung 4: $\Gamma(f) \cap E$

**(d)** Der Schnitt ist gegeben durch das Bild der Funktion

$$\gamma \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ f((2t, t)^\intercal) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ \frac{4t^2+1}{t^2+1} \end{pmatrix}$$

welches durch die schwarze Linie in Abbilding 4 gegeben ist:

**Aufgabe H 113.** *Funktionen mehrerer Veränderlicher II: Stetigkeit*

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \dfrac{2\,xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0}. \end{cases}$$

Ein Modell für den Funktionsgraphen finden Sie unter
`https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/04/`

**(a)** Für $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto t\binom{a}{b}$ die Parametrisierung einer Geraden durch den Ursprung. Ist $f \circ g$ stetig?

**(b)** Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \binom{0}{0}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

**(c)** Ist $f$ stetig in $\binom{0}{0}$?

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Sei $g$ eine Gerade wie in der Aufgabenstellung. Dann gilt

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} \dfrac{2\,ab^2t^3}{a^2t^2+b^4t^4} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

durch einfaches Einsetzen (beachte $g(t) = \binom{0}{0}$ genau dann wenn $t = 0$). Es gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\,ab^2t^3}{a^2t^2+b^4t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{2\,ab^2t}{a^2+b^4t^2} = 0$$

was zeigt, dass $f \circ g$ in $0$ stetig ist. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f \circ g$ eine gebrochene rationale (wohldefinierte) Funktion und damit stetig.

**(b)** Man rechnet leicht nach, dass die Niveaulinie von $f$ zum Niveau $t = 1$ eine Parabel ist, der ein Punkt fehlt. In der Tat, für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{2xy^2}{x^2+y^4} = 1 \iff 2xy^2 = x^2 + y^4 \iff 0 = (x-y^2)^2 \iff y^2 = x$$

dank der Binomischen Formeln. Damit ist insbesondere jede Folge die auf der Menge $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x \text{ und } (x,y) \neq (0,0)\}$ gegen $\binom{0}{0}$ konvergiert eine Lösung. Sei etwa

$$a_n = \binom{\exp(-2n)}{\exp(-n)} \neq \binom{0}{0}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f(a_n) = \frac{2\exp(-2n)\exp(-n)^2}{\exp(-2n)^2 + \exp(-n)^4} = 1$$

dank der Exponentialgesetze. Außerdem $a_n \to \binom{0}{0}$ für $n \to \infty$. Damit ist die so definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine mögliche Lösung.

**(c)** Nein, da

$$1 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f\left(\binom{0}{0}\right) = 0$$

für Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabenteil (b) gilt.

**Aufgabe H 114.** *Folgen in $\mathbb{R}^2$*

Finden Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folgen $(a_k)_{k\geq 1}$.

**(a)** $a_k = (\cos(2\pi k/3), \sin(2\pi k/3))^\intercal$

**(b)** $a_k = \left(k, \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2}\right)^\intercal$

**(c)** $a_k = (2 + \frac{1}{k}, ke^{-k})^\intercal$

**(d)** $a_k = \left((-1)^k, \sum_{j=0}^k \frac{(-25)^j}{(2j)!}\right)^\intercal$

**Lösungshinweise hierzu:**

**(a)** Wir definieren drei Teilfolgen von $(a_k)_{k\geqq 1}$. Sei $(k_{n,i})_{i\geqq 1} = (3i+n)_{i\geqq 0}$ für $n \in \{1,2,3\}$. Dann ist

$$a_{k_{n,i}} = \begin{pmatrix}\cos(2\pi(3i+n)/3)\\ \sin(2\pi(3i+n)/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(2\pi n/3)\\ \sin(2\pi n/3)\end{pmatrix}$$

für $n \in \{1,2,3\}$ konstant in $i$ und damit konvergent. Da jedes Folgenglied in genau einer der 3 Teilfolgen vorkommt sind

$$\left\{\begin{pmatrix}\cos(2\pi n/3)\\ \sin(2\pi n/3)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \{1,2,3\}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

genau die 3 Häufungspunkte von $(a_k)_{k\geqq 1}$.

**(b)** Sei $k \neq l$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $k > l$ an. Dann gilt

$$|a_k - a_l| = \sqrt{(k-l)^2 + \left(\sum_{j=l}^k \frac{1}{j^2}\right)^2} \geqq 1.$$

Damit kann keine Teilfolge von $(a_k)_{k\geqq 1}$ eine Cauchy-Folge sein und damit ist auch keine Teilfolge von $(a_k)_{k\geqq 1}$ konvergent. Da es für jeden Häufungspunkt von $(a_k)_{k\geqq 1}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k\geqq 1}$ gibt, die gegen diesen Punkt konvergiert, hat die Folge $(a_k)_{k\geqq 1}$ folglich keine Häufungspunkte.

**(c)** Da $2 + \frac{1}{k} \to 2$ und $k\mathrm{e}^{-k} \to 0$ für $k \to +\infty$ gilt

$$a_k \to \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

für $k \to \infty$, d.h. die Folge ist konvergent. Damit ist der Grenzwert $\binom{2}{0}$ der einzige Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\geqq 1}$.

**(d)** Wir definieren zwei Teilfolgen von $(a_k)_{k\geqq 1}$. Sei $(k_{n,i})_{i\geqq 1} = (2i+n)_{i\geqq 0}$ für $n \in \{1,2\}$. Dann ist

$$a_{k_{n,i}} = \begin{pmatrix}(-1)^{2i+n}\\ \sum_{j=0}^{2i+n} \frac{(-25)^j}{(2j)!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^n\\ \sum_{j=0}^{2i+n} (-1)^j \frac{5^{2j}}{(2j)!}\end{pmatrix}$$

für $n \in \{1,2\}$. Die erste Koordinate dieser Folgen ist konstant (in $i \geqq 0$), die zweite Koordinate konvergiert unabhänging von $n \in \{1,2\}$ für $i \to +\infty$ gegen $\cos(5)$. Da jedes Folgenglied von $(a_k)_{k\geqq 1}$ in einer der beiden Teilfolgen vorkommt, sind die Häufungspunkte der Folge $(a_k)_{k\geqq 1}$ genau die Grenzwerte der oben definierten Teilfolgen, also

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\ \cos(5)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ \cos(5)\end{pmatrix}\right\}.$$

**Frischhaltebox**

**Aufgabe H 115.**
Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 3 = 0\}$.

**Lösungshinweise hierzu:** Die Matrix-Beschreibung $x^\intercal Ax + 2a^\intercal x + c = 0$ der Quadrikgleichung ist gegeben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $c = 3$. Wir haben $\operatorname{Rg} A = 1$, die erweiterte Matrix $A_{\text{erw}} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat den Rang

$$\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} = \operatorname{Rg}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \operatorname{Rg}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 3.$$

Also gilt $\operatorname{Rg} A_{\text{erw}} - \operatorname{Rg} A = 2$; die Quadrik ist vom parabolischen Typ. Für Quadriken vom parabolischen Typ in $\mathbb{R}^2$ gibt es nur eine einzige affine Normalform: $\xi_1^2 + 2\xi_2 = 0$.
**Alternative:** Wir führen den Algorithmus zur Bestimmung der euklidischen Normalform so weit durch, dass wir die affine Normalform ablesen können.
Die Eigenwerte von $A$ sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$. [Den Eigenwert $0$ gibt es, weil $A$ singulär ist, den anderen Eigenwert erhalten wir dann sofort aus der Spur von $A$.] Eine ONB aus Eigenvektoren ist gegeben durch $f_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $f_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, die Transformationsmatrix $F := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ liefert dann $\tilde{A} = F^\intercal AF = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\tilde{a} = F^\intercal a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, also die neue Gleichung $2y_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 3 = 0$.
Wir wissen, dass man in den nächsten beiden Schritten durch quadratische Ergänzung den linearen Term in der ersten Variablen beseitigen und dann durch Verschiebung gegen die Konstante diese auf Null bringen kann: Also ergibt sich die Gleichung $2w_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}w_2 = 0$ und dann die affine Normalform $\xi_1^2 + 2\xi_2 = 0$.