Lösungshinweise zu den Hausaufgaben:

Aufgabe H 116. *Gradienten und Niveaumengen*

Gegeben seien die Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}}{(1+x_3^2)^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} g$.

(b) Bestimmen Sie die Niveaumenge zum Niveau $c = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \nabla g\,(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} g(x) &= \frac{x_1 x_2 \left(1+x_1^2\right)^{x_2-1}}{(1+x_3^2)^2\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}} \\
\partial_{x_2} g(x) &= \partial_{x_2} \frac{\sqrt{1+\exp\left(x_2 \ln(1+x_1^2)\right)}}{(1+x_3^2)^2} \\
&= \frac{\ln(1+x_1^2)\mathrm{e}^{x_2\ln(1+x_1^2)}}{2(1+x_3^2)^2\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}} \\
\partial_{x_3} g(x) &= -\frac{4x_3\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}}{(1+x_3^2)^3}
\end{aligned}$$

woraus wir

$$\operatorname{grad} g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2\left(1+x_1^2\right)^{x_2-1}(1+x_3^2)}{(1+x_3^2)^2\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}} \\ \frac{\ln(1+x_1^2)\left(1+x_1^2\right)^{x_2}(1+x_3^2)}{2(1+x_3^2)^2\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}} \\ -\frac{4x_3\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}}}{(1+x_3^2)^3} \end{pmatrix}$$

erhalten.

(b) Wegen $1+x_1^2 > 0, 1+x_3^2 > 0$ für beliebige $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ folgt $(1+x_1^2)^{x_2} > 0, (1+x_3^2)^2 > 0$ für alle $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ und somit insbesondere $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$, die Niveaumenge ist folglich die leere Menge.

(c) Sei $\nabla g(x) = 0$. Wie bereits festgestellt, gilt auf jeden Fall $\sqrt{1+(1+x_1^2)^{x_2}} > 0$, womit aus der dritten Komponente sofort $x_3 = 0$ folgt. Aus der zweiten Komponente erhalten wir die Bedingung

$$\ln(1+x_1^2)\underbrace{\mathrm{e}^{x_2\ln(1+x_1^2)}}_{>0}\underbrace{(1+x_3^2)}_{>0}$$

und somit $1+x_2^2 \overset{!}{=} 1$, was $x_2 = 0$ impliziert. Mit $x_2 = 0$ ist aber auch sofort die erste Komponente 0, wir erhalten

$$\mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2 = 0, x_3 = 0 \right\}$$

Aufgabe H 117. *Kritische Stellen und Extrema*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \left(\mathrm{e}\, y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^5 - 5y_2$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla f(y)$ und $\mathrm{H}f\,(y)$.

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und entscheiden Sie jeweils, ob in diesen lokale Extrema oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Es gelten:

$$\nabla f(y) = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)} \cdot \exp(-y_1) \cdot (-1)\right) y_2^5 \\ 5\left(y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\exp(-y_1)-y_1}\right) y_2^5 \\ 5\left(y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^4 - 5 \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\mathrm{H}f\,(y) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\exp(-y_1)-y_1}\left(-\mathrm{e}^{-y_1} - 1\right) y_2^5 & 5\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\exp(-y_1)-y_1}\right) y_2^4 \\ 5\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\exp(-y_1)-y_1}\right) y_2^4 & 20\left(\mathrm{e}y_1 + \mathrm{e}^{\exp(-y_1)}\right) y_2^3 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $\nabla f(y) = 0$. Dann ergeben sich aus der ersten Komponente die Möglichkeiten $y_2 = 0$ oder $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\exp(-y_1)-y_1}$. Da ersteres auf $-5 = 0$ führt, liefert dies keine kritische Stelle. Zweiteres gilt genau dann, wenn

$$\exp(-y_1) - y_1 = 1$$

ist. Durch geschicktes Raten sehen wir, dass $y_1 = 0$ eine Lösung ist: $\exp(0) - 0 = 1$. Da ferner die Funktion $y_1 \mapsto \exp(-y_1) - y_1$ wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y_1}\left(\exp(-y_1) - y_1\right) = -\exp(-y_1) - 1 \leqq -1 < 0 \forall y_1$$

streng(!) monoton fällt, existieren keine weiteren Kandidaten. Einsetzen in die zweite Komponente liefert die Bedingung

$$-5 + 5\mathrm{e}y_2^4 = 0,$$

wir erhalten die kritischen Stellen

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \end{pmatrix} \quad , \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Hessematrizen an den kritischen Stellen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}f\left(K_1\right) = \mathrm{H}f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\right)^5 & 0 \\ 0 & 20\mathrm{e}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\right)^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} & 0 \\ 0 & -20\sqrt[4]{\mathrm{e}} \end{pmatrix} \\
\mathrm{H}f\left(K_2\right) &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\right)^5 & 0 \\ 0 & 20\mathrm{e}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\right)^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} & 0 \\ 0 & 20\sqrt[4]{\mathrm{e}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Diagonalgestalt können wir die Eigenwerte ablesen und erhalten mit 4.5.5:

- In K_1 sind beide EW negativ, die Hesse-Matrix also negativ definit, hier liegt ein lokales Maximum vor.
- In K_2 sind beide EW positiv, die Hesse-Matrix also positiv definit, hier liegt ein lokales Minimum vor.

Aufgabe H 118. *Funktionen in mehreren Veränderlichen*

Gegeben sei die Funktion *Luxemburg*: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \dfrac{y^2}{\mathrm{e}}$.

(a) Bestimmen Sie ∇*Luxemburg* $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ sowie die kritischen Stellen.

(b) Sei $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right\}$ der zugehörige Graph. Skizzieren Sie die Schnitte von $\mathcal{G}$ mit der x-z- sowie mit der y-z-Ebene in ein geeignetes Koorinatensystem für $(x,y)^\intercal \in [-3,3]\times[-3,3]$.

Hinweis: Zum Auswerten der Funktion an Teststellen dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder ein vergleichbares elektronisches Hilfswerkzeug benutzen.

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob an den kritischen Stellen lokale Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen

$$\nabla \mathit{Luxemburg}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ 2y\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right) \end{pmatrix}$$

Sei nun ∇*Luxemburg* $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Komponente folgt sofort $x = 0$. Wir erhalten aus der zweiten die Gleichung

$$-2y\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-y^2}\right) = 0$$

Somit ist $y = 0$ oder (aufgrund der Injektivität der Exponentialfunktion) $-1 = -y^2$, also $y = 1$ oder $y = -1$. Die kritischen Stellen sind somit

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

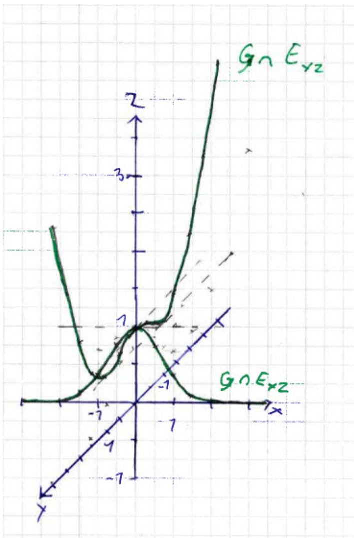
(b) In der x-z-Ebene E_{xz} gilt $y = 0$, der Schnitt entspricht dem Graphen der Funktion $x \mapsto \exp(-x^2)$. Analog gilt für die y-z-Ebene E_{yz} $x = 0$, der Schnitt entspricht dem Graphen der Funktion $y \mapsto \mathrm{e}^{-1}y^2 + \mathrm{e}^{-y^2}$. Diese beiden Funktionen sind gerade, es genügt aus Symmetriegründen exemplarische Werte im Intervall $[0, 3]$ näherungsweise(!) zu berechnen:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	0	0	0	0	0	0	0
$z \approx f\left((x, y)^\intercal\right)$	1	$0,7788$	$0,3679$	$0,1054$	$0,0183$	$0,0019$	$0,0001$
$2z$	2	$1,5576$	$0,7358$	$0,2108$	$0,0366$	$0,0039$	$0,0002$

x	0	0	0	0	0	0	0
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$z \approx f\left((x, y)^\intercal\right)$	1	$0,8708$	$0,7358$	$0,9331$	$1,4898$	$2,3012$	$3,3110$
$2z$	2	$1,7415$	$1,4715$	$1,8663$	$2,9797$	$4,6024$	$6,6221$

Da die Werte beim ersten Schnitt sehr klein sind, empfiehlt es sich, für die z-Achse eine etwas größere Skalierung zu wählen, in diesem Falle wurde der Faktor 2 gewählt.

Vorsicht: Diese Wahl ist hier möglich, da nur ein geeignetes Koordinatensystem verlangt war. Ist ein kartesisches System verlangt, müssen die Achsen natürlich alle die selbe Skalierung haben.



(c) Wir berechnen die Hessematrix: Es gilt

$$\mathrm{H}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (4x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} & 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2} & 2\mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 4y^2\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathrm{H}f\,(K_1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\mathrm{e}} \end{pmatrix} = \mathrm{H}f\,(K_3)$$

$$\mathrm{H}f\,(K_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \end{pmatrix}$$

In K_1 und K_3 haben die Eigenwerte $\left(-\frac{2}{\mathrm{e}},\ \frac{4}{\mathrm{e}}\right)$ verschiedene Vorzeichen, hier liegen Sattelpunkte vor. In K_2 haben die Eigenwerte $\left(-2 \text{ und } -2\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)$ wegen $1 > \frac{1}{\mathrm{e}}$ beide ein negatives Vorzeichen, hier liegt somit negative Definitheit vor, an dieser Stelle befindet sich ein lokales Maximum.

Aufgabe H 119. *Schmiegquadriken*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{\cos(1-x^2)}{1+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f\binom{x}{y}$ und $\mathrm{H}f\left(\binom{x}{y}\right)$.

(b) Geben Sie jeweils das Taylorpolynom 2. Grades in den Entwicklungspunkten $P = \binom{0}{0}$ und $Q = \binom{1}{0}$ an.

(c) Klassifizieren Sie die Schmiegquadriken in diesen Punkten gemäß 7.3.7/7.3.8.

Lösungshinweise hierzu:

(a) Wir berechnen:

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2x\sin\left(1-x^2\right)}{1+y^2} \\ -\frac{2y\cos(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2\sin(1-x^2)-4x^2\cos(1-x^2)}{1+y^2} & -\frac{4xy\sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{4xy\sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} & -\frac{2\cos(1-x^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{8y^2\cos(1-x^2)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{2\sin(1-x^2)-4x^2\cos(1-x^2)}{1+y^2} & -\frac{4xy\sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{4xy\sin(1-x^2)}{(1+y^2)^2} & \frac{2(3y^2-1)\cos(1-x^2)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

(b) Wir erhalten mit (a)

$$f(P) = \cos(1) \;\Big|\; \nabla f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Big|\; \mathrm{H}f\,(P) = \begin{pmatrix} 2\sin(1) & 0 \\ 0 & -2\cos(1) \end{pmatrix}$$

$$f(Q) = 1 \;\Big|\; \nabla f(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Big|\; \mathrm{H}f\,(Q) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir:

$$T_2\left(f, (x,y)^\intercal, P\right) = f(P) + \left\langle \nabla f(P) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathrm{H}f\,(P) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \cos(1) + \sin(1)x^2 - \cos(1)y^2$$
$$T_2\left(f, (x,y)^\intercal, Q\right) = f(Q) + \left\langle \nabla f(Q) \,\middle|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q \right\rangle + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} - Q\right) \mathrm{H}f\,(Q) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - Q\right)$$
$$= 1 - 2(x-1)^2 - y^2$$

(c) Mit dem Taylorpolynom 2. Stufe erhalten wir für die Schmiegquadrik in P die Gleichung

$$-\cos(1) - \sin(1)x^2 + \cos(1)y^2 + z = 0$$

bzw.

$$-2\sin(1)x^2 + 2\cos(1)y^2 + 2(z - \cos(1)) = 0$$

Mit $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ (wegen $\pi > 3$) und somit $0 < \sin(1)$, $0 < \cos(1)$ liegt hier ein hyperbolisches Paraboloid vor.
Für Q erhalten wir aus $z = T_2(f, (x,y)^\intercal, Q)$ die Gleichung

$$4(x-1)^2 + 2y^2 + 2(z-1) = 0,$$

die Schmiegquadrik ist ein elliptisches Paraboloid.

Frischhaltebox

Aufgabe H 120.
Gegeben seien die Vektoren $u_1 = (2,4,2,-2,6)^\intercal$, $u_2 = (1,8,5,-1,3)^\intercal$ und $u_3 = (1,16,1,-3,9)^\intercal$. Bestimmen Sie ein ONS $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(u_1) = \mathrm{L}(f_1)$, $\mathrm{L}(u_1,u_2) = \mathrm{L}(f_1,f_2)$ und $\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3) = \mathrm{L}(f_1,f_2,f_3)$.

Lösungshinweise hierzu: Wir verwenden das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren:

$$f_1 := \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{4+16+4+4+36}} \begin{pmatrix} 2\\4\\2\\-2\\6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{64}} \begin{pmatrix} 2\\4\\2\\-2\\6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\-1\\3 \end{pmatrix}$$

$$f_2^* := u_2 - \langle u_2 \,|\, f_1 \rangle f_1 = \begin{pmatrix} 1\\8\\5\\-1\\3 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\8\\5\\-1\\3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\-1\\3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=32} \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\-1\\3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\4\\3\\1\\-3 \end{pmatrix}$$

$$|f_2^*| = \sqrt{1+16+9+1+9} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1\\4\\3\\1\\-3 \end{pmatrix}$$

$$f_3^* := u_3 - \langle u_3 \,|\, f_1 \rangle f_1 - \langle u_3 \,|\, f_2 \rangle f_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1\\16\\1\\-3\\9 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\16\\1\\-3\\9 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\-1\\3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=64} \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\-1\\3 \end{pmatrix} - \frac{1}{36} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1\\16\\1\\-3\\9 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1\\4\\3\\1\\-3 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=36} \begin{pmatrix} -1\\4\\3\\1\\-3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|f_3^*| &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} \\
\Rightarrow f_3 &= \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$